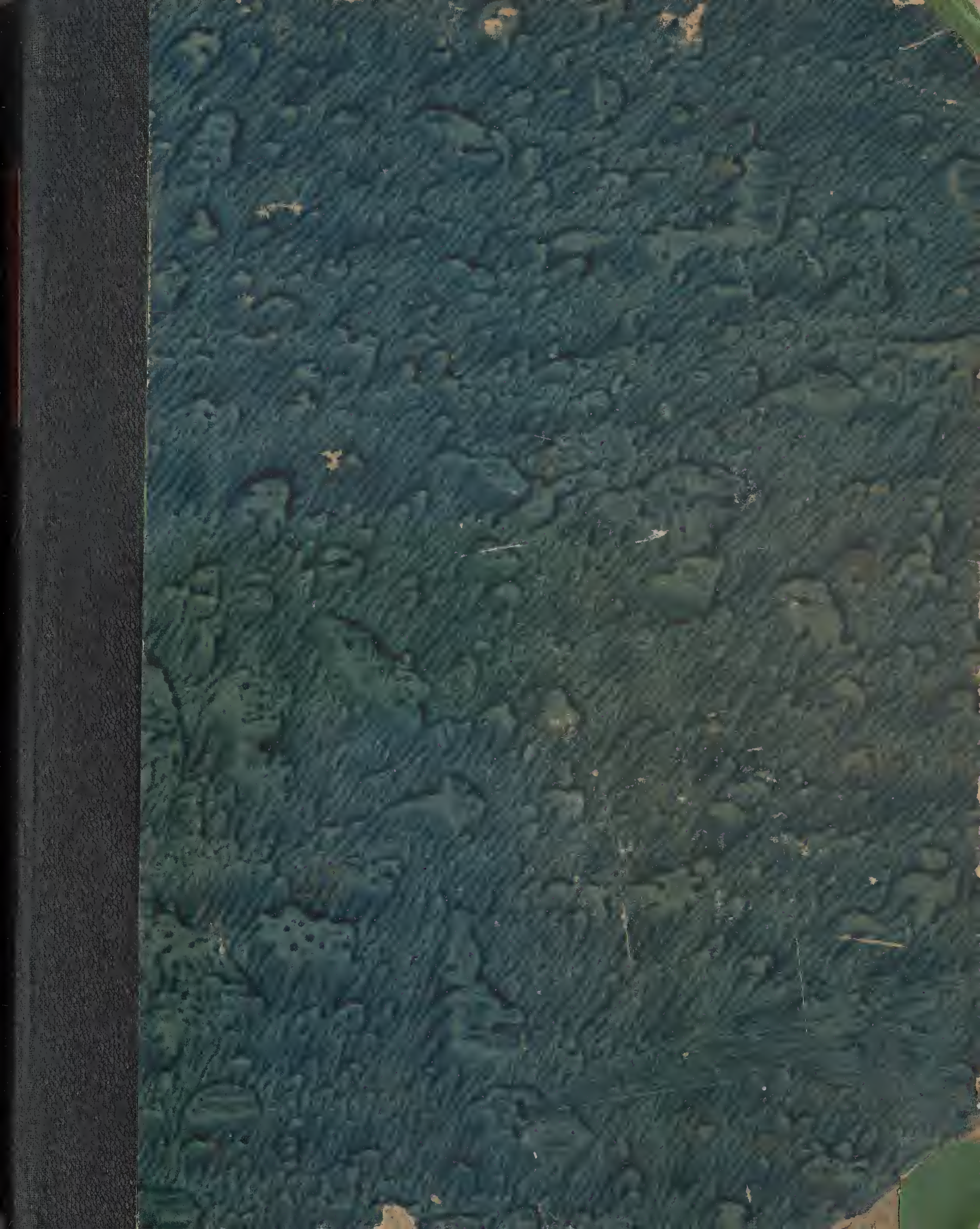
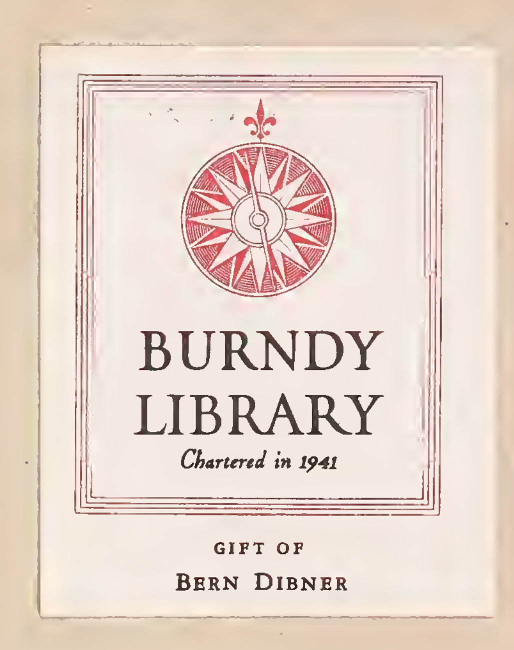


[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible] 156

597


BURNDY
LIBRARY
Chartered in 1941
GIFT OF
BERN DIBNER

Cours

d'Analyse et de Mécanique

—

à l'Ecole Polytechnique :

—

Mr Ampère, professeur

—

1re année d'Etudes, 1823-1824.

G. Vincens

~~Fonctions Explicites~~

~~Fonctions simples~~
Dérivées du 1^r ordre

Applications du Calcul Différentiel.

Applications à la Géométrie.

(1) Courbes planes

(3) Courbes à double courbure.

(4) Surfaces courbes

(2) Courbes rapportées aux coordonnées polaires.

Logarithmique $y=a^x$ — Pages 88.

Courbe des sinus. $y=\sin x$ — 88

Folium de Descartes $y^3+x^3-3axy=0$. Pages 89–92–93–98

Conchoïde $x^2=\left(\frac{a^2}{y^2}-1\right)(b-y)^2$ Pages 100–104

Cycloïde $x=a.\text{arc}\cos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$ — 127.

Sections coniques $y^2=2mx+nx^2$. Pages 87.

Ellipse — $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ Pages.

hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ Pages 90–91

Parabole Pages 119 –

Courbes à double courbure

Hélice $y=a\sin\frac{2\pi z}{h}$ $x=a\cos\frac{2\pi z}{h}$ pages 133.

Courbes rapportées aux coordonnées polaires.

$u=at+b$ pages 112.

Spirale hyperbolique $ut=m$ — 113

Spirale logarithmique. $u=a^t$ 113 – 154.

C

Analyse.

On distingue en Analyse les quantités variables des quantités constantes, les 1res changent de valeur dans le calcul, les 2des conservent la même valeur.

Une fonction d'une ou plusieurs variables est une expression qui contient ces variables et qui prend des valeurs déterminées lorsqu'on donne à ces variables des valeurs déterminées.

Une fonction peut contenir, outre les variables, certaines constantes, Ainsi ds la fonction $u = \mathcal{L}x$, la constante est la base du système de log.

Les constantes comprises ds une fonction se nomment paramètres.

En général si on a p éq. entre n variables, il faut que $n > p$ et alors il y a $n-p$ variables indépendantes.

Lorsque les fonctions contiennent des radicaux elles sont susceptibles de plusieurs valeurs qu'il faut regarder cō autant de fonctions différentes. Lorsqu'on ne veut considérer que la racine positive et réelle d'une quantité A on écrit $\sqrt[n]{A}$, si on veut prendre toutes les racines on écrit $((\sqrt[n]{A}))$. De même $\mathcal{L}.A.$ est le log. de A pris dans une base déterminée et $((\mathcal{L}A))$ est le log. ds une base quelconque.

Il y a certaines fonctions qu'on peut représenter en Algèbre et il y en a d'autres qu'on ne peut pas représenter. Les 1res sont implicites ou explicites.

Une fonction est implicite lorsqu'elle est représentée par une éq. qui n'est pas résolue, elle est explicite lorsque l'éq. est résolue.

Les fonctions explicites sont algébriques ou transcendantes les 1res sont celles qui ne contiennent que les signes des 5 opérations d'arithmétique les 2des sont celles dans lesquelles il entre les signes de sinus cosinus &c. ~~Les~~

Les fonctions algébriques sont rationnelles ou irrationnelles

Les rationnelles sont entières lorsque la variable n'entre pas au dénominateur, ou fractionnaires lorsqu'elles s'y trouve.

On distingue encore les fonctions simples des fonctions composées. Les fonctions simples ont un seul terme qui contient la variable, elles ~~des fonctions composées~~ résultent de l'addition lorsque la variable est affectée du signe + ex $y = x \pm a$, elles résultent de la soustraction lorsque la variable est affectée du signe − ex $y = \pm a - x$. (A)

En Géométrie on représente les fonctions à deux variables par des lignes rapportées à deux axes. Les fonction à 3 variables sont représentées par des surfaces rapportées à 3 plans.

(A) Les fonctions simples sont $y = x \pm a$, $y = a - x$, $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$, $y = x^m$, $y = a^x$, $y = \alpha x$, $y = \sin x$ ou $\cos x$, $y = \text{arc}\sin x$ ou $\text{arc}\cos x$.

Les fonctions composées sont formées de plusieurs termes qui contiennent la variable.

Lorsqu'on donne la propriété dont jouit une fonction on peut déterminer quelle est le genre de cette fonction.

Supposons que pour une certaine fonction f on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$ on demande à quoi est égale $f(x)$.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (B)$$

Je pose $y = x \quad f(2x) = 2f(x)$

$y = 2x \quad f(3x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$

$y = (n-1)x \quad f(nx) = nf(x) \quad (A)$

Ainsi la fonction est telle que lorsqu'on multiplie la variable par n, nombre entier et positif, pour que l'égalité subsiste il faut aussi multiplier la fonction par n. Voyons si cette propriété a lieu quel que soit n.

Ds l'égalité (A) je pose $nx = z$ d'où

$$f(z) = n f\left(\frac{z}{n}\right) \quad , \quad \frac{1}{n} f(z) = f\left(\frac{z}{n}\right).$$

mais on peut multiplier la fonction et la variable par une quantité p entière et positive, on aura donc

$$\frac{p}{n} f(z) = f\left(\frac{p}{n} z\right)$$

Ds l'éq. (B) je fais $y = 0$ d'où

$$f(x) = f(x) + f(0)$$

$$f(0) = 0.$$

~~Ds l'égalité (B)~~ Je fais ensuite $y = -x$ d'où

$$f(0) = f(x) + f(-x) \quad , \quad f(-x) = -f(x)$$

par const $f(-tz) = -t f(z)$.

C. à. d. qu'on a la relation

$$f(tz) = t f(z)$$

quel que soit t. Si dans cette dernière égalité je pose $tz = u$ ou $t = \frac{u}{z}$, j'aurai

$$f(u) = \frac{u}{z} f(z) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{f(u)}{u} = \frac{f(z)}{z} = \frac{f(x)}{x} = K.$$

K étant une quantité constante ; nous avons donc

$$f(x) = Kx.$$

c. à. d. que le signe f. ~~repré~~ indique ds ce cas qu'on multiplie x par une certaine quantité constante.

Au moyen de cette propriété on peut démontrer un grand nombre de propositions de géométrie.

Ainsi pour démontrer que si on coupe 2 lignes AC, AE par deux parallèles BD, CE on aura

$$AB : BC = AD : DE.$$

je pose $AB = x$ on aura $AD = f(x)$, Par le pt D je mène DF parallèle à BC et je pose $BC = DF = y$ on aura $DE = f(y)$. Dc à cause de ~~AD = AB + B~~ $AE = AD + D$ on aura $f(x+y) = f(x) + f(y)$ d'où $f(x) = Kx$ par const $AD = K \cdot AB$ et $DE = K \cdot BC$ d'où

$$AB : BC = AD : DE.$$

Supposons qu'on demande à quoi est égale $f(x)$, lorsqu'on donne $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Je fais $y = x$ $\quad f(x^2) = 2f(x)$

$y = x^2 \quad f(x^3) = 3f(x)$

$y = x^{(n-1)} \quad f(x^n) = nf(x)$.

Je pose $x^n = z$ ds la dernière égalité et j'ai.

$$f(z) = nf(z^{\frac{1}{n}}) \qquad \tfrac{1}{n}f(z) = f(z^{\frac{1}{n}}) \qquad \tfrac{p}{n}f(z) = f(z^{\frac{p}{n}}) \quad (x)$$

x Enfin quel que soit t on aura

$$t f(z) = f(z^t).$$

posant $z^t = u$ d'où $t = \frac{\mathcal{L}u}{\mathcal{L}z}$

$$\frac{\mathcal{L}u}{\mathcal{L}z} f(z) = f(u) \qquad \frac{f(z)}{\mathcal{L}z} = \frac{f(u)}{\mathcal{L}u} = K$$

Enfin $f(x) = K\mathcal{L}.x.$ (A)

Soit $f(x+y) = f(x)f(y)$

$y = x \quad f(2x) = f(x)^2$

$f(nx) = f(x)^n \quad$ posant $nx = z$

$$f(z) = f(\tfrac{1}{n}z)^n \qquad f(z)^{\frac{1}{n}} = f(\tfrac{1}{n}z) \qquad f(z)^{\frac{p}{n}} = f(\tfrac{p}{n}z)$$

$$f(tz) = f(z)^t.$$

Si ds la 1re égalité on fait $y = 0$ on aura

$f(x) = f(x) \times f(0)$ d'où $f(0) = 1$.

faisant $y = -x$. $\quad f(0) = 1 = f(x)f(-x)$ d'où $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

$$f(-tz) = \frac{1}{f(z)^t} = f(z)^{-t}.$$

Je pose $tz = u$ d'où $t = \frac{u}{z}$

$$f(u) = f(z)^{\frac{u}{z}} \qquad f(u)^{\frac{1}{u}} = f(z)^{\frac{1}{z}} = k$$

Enfin $f(x) = k^x$.

(A.) Au moyen de cette formule on peut trouver le module pour un système quelconque de log. En effet supposons que les log. soient pris ds le système dont la base est b on aura

$x = b^{lx}$

mais $lx = \frac{f(x)}{K}$

dc $x = b^{\frac{1}{K}f(x)}$

posant $b^{\frac{1}{K}} = b'$

$x = b'^{f(x)}$

$f(x) = l'x$

$l'x = K\,lx$

De l'éq. $b^{\frac{1}{K}} = b'$ on tire

$\frac{1}{K} = l.b' \quad K = \frac{1}{lb'}$

substituant

$l'x = \frac{1}{lb'} \times lx$

Dc &c ---

(x) Faisant ds la 1re éq. $y = 1$ on a

$f(x) = f(x) + f(1)$ d'où $f(1) = 0$

faisant $y = x^{-1}$ on a

$f(1) = f(x) + f(x^{-1})$ d'où

$f(x^{-1}) = -f(x)$

et par suite

$f(x^{-t}) = -t f(x)$. x

(x) Faisant dᵉ la 1ʳᵉ éq $y=1$ on a $f(x)=f(x)f(1)$ d'où

$$f(1)=1$$

Faisant $y=x^{-1}$ on a

$$f(1)=f(x)f(x^{-1})$$ d'où

$$f(x^{-1})=f(x)^{-1}$$

Soit enfin. $f(xy)=f(x)f(y)$

$y=x$ $\quad f(x^2)=f(x)^2$

$f(x^n)=f(x)^n$ faisant $x^n=z$

$$f(z)=f(z^{\frac{1}{n}})^n \quad f(z)^{\frac{1}{n}}=f(z^{\frac{1}{n}}) \quad (x)$$

Donc q. st t – – $f(z)^t=f(z^t)$

Je pose $z^t=u$ $\quad t=\frac{Lu}{Lz}$

$$f(z)^{\frac{Lu}{Lz}}=f(u) \quad \sout{\frac{f(z)}{Lz}} = \frac{f(u)}{Lu}$$

$$f(z)^{\frac{1}{Lz}}=f(u)^{\frac{1}{Lu}}=K$$

$$f(x)=K^{Lx}$$

Je pose $K=b^{LK}$ j'aurai

$$f(x)=b^{LK\times Lx}=(b^{Lx})^{LK}=x^{LK}=x^{n}.$$

Si on fait $f(x)=\cos x$ on aura la relation $f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(y)$. En effet nous aurons

$$f(x-y)=\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

$$f(x+y)=\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

Ajoutant ces deux identités

$$f(x-y)+f(x+y)=\underline{2\cos x\cos y}=2f(x)f(y).$$

On peut en appliquant les méthodes précédentes reconnaître les propriétés qui existent entre des expressions plus compliquées. Exemple. Je pose,

$$\cos y+\sqrt{-1}\sin y=f(y).$$

$$\cos x+\sqrt{-1}\sin x=f(x).$$

Multipliant

$$\left.\begin{matrix}\cos x\cos y+\sqrt{-1}\sin y\cos x\\ -\sin x\sin y+\sqrt{-1}\sin x\cos y\end{matrix}\right\}=f(x+y)=f(x)f(y).$$

Lorsque cette propriété a lieu on a

$$f(nx)=f(x)^n \quad \text{et} \quad f(x)=K^x \text{ par const.}$$

$$\cos nx+\sqrt{-1}\sin nx=(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^n.$$

et $\quad \cos x+\sqrt{-1}\sin x=K^x.$

Si on veut déterminer la constante k il faut faire $x=1$ et on aura $k=\cos 1+\sqrt{-1}\sin 1$. Pour savoir à quoi est égal le cosinus d'un arc dont la longueur (exprimée en fonction du rayon) est 1, il faut d'abord trouver le degré de cet arc; pour cela on aura la proportion

$$3,1415 : 200^\circ = 1 : x^\circ.$$

Connaissant cet arc on trouvera ds les tables son sinus et son cosinus et on aura la valeur de k.

Au moyen de la dernière formule on peut en trouver deux autres qui donnent les sinus et les cosinus d'arcs multiples en fonction des sinus et cosinus de l'arc simple.

En effet j'aurai en développant le 2d membre

$$\cos nx+\sqrt{-1}\sin nx = \cos^n x + n\sqrt{-1}\cos^{n-1}x\sin x$$
$$-\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sqrt{-1}\cos^{n-3}x\sin^3 x$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}x\sin^4 x + \&c$$

Egalant la partie réelle du 1r membre à celle du 2d et la partie imaginaire à la partie imaginaire

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \ldots$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1}x\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \&c$$

On voit donc que pour avoir ces deux formules il faut développer le binome $(\cos x+\sin x)^n$ prendre pour $\cos nx$ les termes de rangs impairs en les affectant alternativement des signes + et − et pour $\sin nx$ les termes de rangs pairs affectés alternativemt des signes + et −.

On peut au moyen de cette propriété effectuer les opérations sur les quantités imaginaires. Je pose

$$a+b\sqrt{-1} = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

Cette identité peut touj^s subsister puisqu'on en tire

$$a = r\cos\theta \quad b = r\sin\theta \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{a^2+b^2} \quad \tan\theta = \frac{b}{a}.$$

pour multiplier cette expression par $a'+b'\sqrt{-1}$ je pose $a'+b'\sqrt{-1} = r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta')$ et j'aurai

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = rr'(\cos(\theta+\theta') + \sqrt{-1}\sin(\theta+\theta')).$$

On aurait de même.

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta') + \sqrt{-1}\sin(\theta-\theta')).$$

$$(a+b\sqrt{-1})^n = r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta)$$

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right).$$

On peut appliquer les propriétés de l'expression $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ à la résolution des ~~expre~~ équations de la forme $y^n+p=0 \quad y^{2n}+py^n+q=0$.

Soit d'abord l'éq.

$$y^n + p = 0$$

posant $\sqrt[n]{p} = a \quad y^n + a^n = 0$

$\frac{y}{a} = x \quad x^n + 1 = 0$

~~Si la quantité p avait été~~

Si on avait eu $y^n+p=0$ on serait parvenu à $x^n+1=0$.

Considérons d'abord l'éq. $x^n-1=0$.

L'expression $\cos 2K\pi + \sqrt{-1}\sin 2K\pi$ est égale à 1; nous pouvons donc poser

$$x^n = \cos 2K\pi + \sqrt{-1}\sin 2K\pi.$$

$$\text{d'où} \quad x = \cos\frac{2K\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2K\pi}{n}.$$

En faisant successivement $K = 0, 1, 2 \ldots$, on obtiendra n valeurs pour x.. Je dis que si on donne à K des valeurs $> n-1$ on retombera sur une des valeurs qu'on avait déjà trouvées. En effet si on fait $K = h + gn$

h étant plus petit que n on aura

$$\cos\left(2g\pi+\frac{2h\pi}{n}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2g\pi+\frac{2h\pi}{n}\right)$$

expression qui est égale à

$$\cos\frac{2h\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2h\pi}{n}.$$

Résolvons maintenant l'éq. $x^n+1=0$.
L'expression $\cos(2K+1)\pi+\sqrt{-1}\sin(2K+1)\pi$ est égale à -1 on peut donc poser

$$x^n=\cos(2K+1)\pi+\sqrt{-1}\sin(2K+1)\pi.$$

$$\text{d'où}\quad x=\cos\frac{2K+1}{n}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{(2K+1)}{n}\pi.$$

On démontrerait c° précédemment qu'on n'aura pour x que n valeurs.

Dans l'éq. $x^n-1=0$ les racines sont égales 2 à 2 au signe près de la quantité imaginaire, et les valeurs de K qui donnent ces racines correspondantes sont h et $n-h$; en effet en substituant successivement h et $n-h$ à la place de K ds la valeur d'x on a

$$x=\cos\frac{2h\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2h\pi}{n}$$

$$x=\cos\frac{2(n-h)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(n-h)\pi}{n}$$

La somme des arcs est $=2\pi$ par conséquent les cosinus sont égaux et les sinus égaux et de signes contraires, c.à.d. que si une des valeurs est $a+b\sqrt{-1}$ l'autre sera $a-b\sqrt{-1}$.

Dans l'éq. $x^n+1=0$ les racines sont aussi de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$ et pour avoir les racines correspondantes il faut mettre à la place de K h et $n-h-1$ Car on aura alors

$$x=\cos\frac{(2h+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2h+1)\pi}{n}$$

$$x=\cos\frac{(2n-2h-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n-2h-1)\pi}{n}.$$

et la somme des arcs est égale à 2π. Ainsi les valeurs de K qui donnent les racines qui ne diffèrent

que par le signe de la quantité imaginaire sont également distantes des extrêmes 0 et $n-1$,

Connaissant les racines de l'éq. $x^n-1=0$ on peut ds tous les cas trouver celles de $x^n+1=0$. En effet

Si n est impair en changeant x en $-x$ ds l'éq. $x^n+1=0$ elle deviendra $x^n-1=0$, il faudra donc changer le signe des racines de cette éq. et on aura celles de $x^n+1=0$.

Si n est pair $\overline{\text{cō}}$ on a touj^{rs} $x^{2n}-1=(x^n+1)(x^n-1)$, supprimant parmi les racines de $x^{2n}-1=0$ celles qui se trouvent dans $x^n-1=0$, on aura celles de $x^n+1=0$. Or connaissant les racines de $x^n-1=0$ on peut trouver celles de $x^{2n}-1=0$, il suffira pour ~~cela~~ ~~les~~ de prendre les racines carrées des racines de la 1re équation. Or pour $x^n-1=0$ on a

$$x=\cos p+\sqrt{-1}\sin p \qquad p=\frac{2K\pi}{n}$$

par cons^t on aura pour $x^{2n}-1=0$

$$x=\pm\left(\cos\frac{p}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{p}{2}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1+\cos p}{2}}+\sqrt{-1}\sqrt{\frac{1-\cos p}{2}}\right).$$

Résolution de l'éq.

$$y^{2n}+py^n+q=0$$

On en tire $y^n=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

Si $\frac{p^2}{4}>q$ on peut représenter les 2 valeurs de y^n par a et b et on aura à résoudre les deux équations

$$y^n-a=0 \quad y^n-b=0.$$

Si $\frac{p^2}{4}<q$ on pose

$$y^n=r\left(\cos(2K\pi+\theta)\pm\sqrt{-1}\sin(2K\pi+\theta)\right)$$

$$\text{d'où } y=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2K\pi+\theta}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2K\pi+\theta}{n}\right).$$

On démontrerait $\overline{\text{cō}}$ on l'a fait précédemment que cette formule ne donne que n valeurs pour y.

L'éq. $y^{2n}+py^n+q=0$ nous donne

$$y^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Si $q > \frac{p^2}{4}$ on posera

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = r(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta)$$

d'où $-\frac{p}{2} = r\cos\theta$ $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = r\sin\theta$.

$$q = r^2 \quad r=\sqrt{q} \quad \text{et} \cos\theta = \frac{-p}{2r} = \frac{-p}{2\sqrt{q}}$$

Je pose $\sqrt[2n]{q} = a$ d'où $q = a^{2n}$ et

$$\cos\theta = \frac{-p}{2a^n} \quad \text{d'où} \quad p = -2a^n\cos\theta$$

~~L'équation~~ L'équation devient

$$y^{2n}-2a^n\cos\theta\, y^n+a^{2n}=0$$

et les formules de solution seront

$$y = a\left(\cos\frac{2K\pi+\theta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2K\pi+\theta}{n}\right)$$

Pour former les facteurs du 2d degré de cette éq. je multiplie $y - a\cos\frac{2K\pi+\theta}{n} - a\sqrt{-1}\sin\frac{2K\pi+\theta}{n}$

par $y - a\cos\frac{2K\pi+\theta}{n} + a\sqrt{-1}\sin\frac{2K\pi+\theta}{n}$

ce qui donne $y^2 - 2ay\cos\frac{2K\pi+\theta}{n} + a^2$.

Faisant successivement $K = 0, 1, 2 \ldots n-1$ ds ce produit, j'aurai les facteurs du 2d degré dont le produit est égal au 1r membre de l'éq. proposée. On a donc

$$y^{2n}-2a^ny^n\cos\theta+a^{2n} = \left(y^2-2ay\cos\frac{\theta}{n}+a^2\right)\left(y^2-2ay\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+a^2\right)$$
$$\left(y^2-2ay\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+a^2\right)\cdots\left(y^2-2ay\cos\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}+a^2\right)$$

Théorème de Moivre.

Si avec un rayon égal à y on décrit une circonf. et qu'on mène un diamètre quelconque AB et qu'on prenne $OC=a$, portant sur la circonf. des parties $AM = \frac{\theta}{n}$, $MM_1 = \frac{2\pi}{n}$, $M_1M_2 = \frac{2\pi}{n}$ &c on aura

$$\overline{OM}^2 = y^2-2ay\cos\frac{\theta}{n}+a^2, \quad \overline{OM_1}^2 = y^2-2ay\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+a^2 \text{ \&c}$$

Donc $y^{2n}-2a^ny^n\cos\theta+a^{2n} = \overline{OM}^2 \times \overline{OM_1}^2 \times \overline{OM_2}^2 \cdots$

Théorème de Côtes.

1°. Si on suppose que $\theta = 0$ le ~~pt~~ M tombera en A et on aura en extrayant la $\sqrt{}$ des deux membres

$$y^n - a^n = (y-a)\, OM_1 \times OM_2 \times OM_3 \ldots$$

(On voit d'après cela que $y^n - a^n$ est toujours divisible par $y-a$.)

Si n est pair ~~la~~ une division tombera en B et le facteur du milieu sera $y+a$. On aura donc

pour n pair $y^n - a^n = (y-a)\, OM \times OM_1 \ldots (y+a) \ldots$

Si n est impair aucune des divisions ne tombera en B. et il n'y aura de réel que le 1^r facteur $y-a$.

On peut parvenir au même résultat par la formule. Car lorsque $\theta = 0$ $2ay \cos\frac{\theta}{n}$ se réduit à $2ay$ et alors le 1^r facteur est égal à $(y-a)^2$. Si n est pair le terme général $y^2 - 2ay\cos\frac{2K\pi+\theta}{n} + a^2$, lorsque $K = \frac{n}{2}$, se réduit à $(y+a)^2$.

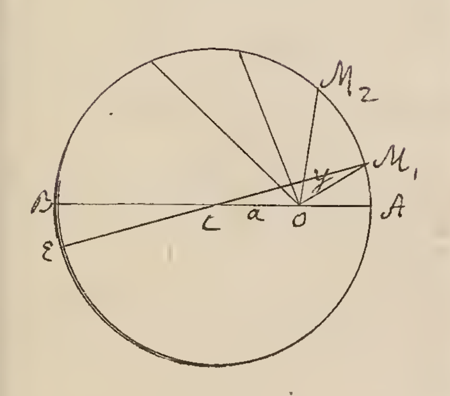
2°. Supposons qu'on fasse $\theta = \pi$ le premier membre se réduira à $(y^n + a^n)^2$. La 1re division sera la $\frac{1}{2}$ des suivantes

Si n est pair un des points de division tombera en E, et par conséq^t il n'y en aura aucun ni en A ni en B. Ainsi dans ce cas ~~ci~~ il n'y a rien de particulier

Si n est impair un des points tombera en B et un des facteurs sera $(y+a)^2$; en sorte qu'en extrayant la $\sqrt{}$ des deux membres on aura

$$y^n + a^n = OM \times OM_1 \times \ldots \times (y+a) \times \ldots$$

Considérons la formule. Le terme $y^2 - 2ay\cos\frac{2K\pi+\theta}{n} + a^2$ pour $K = \frac{n-1}{2}$ se réduit à $y^2 - 2ay\cos\pi + a^2$ ou $(y+a)^2$. Donc



Calcul Différentiel.

Nˢ avons défini une fonction une quantité qui prend des valeurs déterminées lorsqu'on donne des valeurs déterminées aux variables qu'elle renferme.

Il est certaines fonctions ds les quelles donnant à une des variables des valeurs quelc. depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, on aura toujˢ des valeurs réelles pour l'autre variable. Ces fonctions n'ont pas de limites. Il en est d'autres qui donnent des valeurs imaginaires pour certaines valeurs d'une des variables. Ces fonctions ont des limites.

Une fonction $y=f(x)$ est dite continue lorsqu'en donnant à x deux valeurs quelconques x et $x+h$ on obtient pour y des valeurs y et $y+k$ qu'on peut rapprocher l'une de l'autre autant qu'on voudra, en diminuant h convenablement.

~~Une fonction~~ $y=f(x)$ ~~est continue~~ lorsqu'en donnant à x ~~une des variables des valeurs très rapprochées et comprises entre certaines limites, les valeurs correspondtes de l'autre variable diffèrent d'une quantité très petite, et d'autant moindre que la différence entre les quantités substituées est plus petite.~~

Soit une fonction $y=f(x)$ supposons que lorsqu'on remplace x par X, y devienne Y. L'accroissement de x sera $X-x$ et celui de y sera $Y-y$. Par consᵗ. le rapport des accroissements est $\frac{Y-y}{X-x}$ ou $\frac{f(X)-f(x)}{X-x}$.

Ce rapport qui est $\frac{BC}{AC}$ est égal à la tangente de l'angle que la corde qui joint les deux point correspondants à X et à x fait avec l'axe des x.

En général lorsque ds une fonction de X et de x on fait $X=x$, elle devient 0 ∞ ou constante;

Ainsi soit la fonction

$$\frac{x^2+X^2-Xx}{X^3-x^3}$$

Lorsqu'on fait $X=x$ elle se réduit à $\frac{0}{0}$, mais en supprimant le facteur commun $X-x$ elle devient

$$\frac{X-x}{X^2+Xx+x^2}$$

faisant $X=x$ on a $\frac{0}{3x^2}$ ou 0.

Soit $\frac{X^2-x^2}{X+x-2\sqrt{Xx}}$.

Supprimant le facteur commun $\sqrt{X}-\sqrt{x}$ on aura

$$\frac{\sqrt{X}+\sqrt{x}}{\sqrt{X}-\sqrt{x}}$$

faisant $X=x$ il vient $\frac{2\sqrt{x}}{0}=\infty$.

Soit enfin $\frac{a\frac{X}{x}+b}{2g-3c(X-x)}$ faisant $X=x$ on a $\frac{a+b}{2g}$.

Si la fonction est de la forme $\frac{Y-y}{X-x}$ et qu'elle devienne 0 ∞ ou constante lorsque $X=x$, il faut qu'elle soit aussi 0 ∞ ou constante pour une valeur quelconque de X et de x avant qu'on ait fait l'hypothèse $X=x$.

En effet la valeur de $\frac{Y-y}{X-x}$ lorsqu'on fait $X=x$ est la tangente de l'angle que la tangente en un point dont les coordonnées sont x y fait avec l'axe des x. Si cette tangente est 0 ∞ ou constante pour une abscisse quelconque, il est bien évident que la courbe se réduira à une ligne parallèle à l'axe des x, perpendiculaire à cet axe ou dirigée d'une manière quelc. Et si $y=f(x)$ est une droite $\frac{Y-y}{X-x}$ ne varie pas quelle valeur qu'on donne à X et x avant l'hypothèse $X=x$.

On peut démontrer le même théorème par le calcul. Soit x_0 et x_μ deux valeurs quelc. de x. J'intercale entre ces valeurs N^{bre} autres valeurs que je représente par x_1 x_2 x_3.. et que je suppose rangées par

ordre de grandeur. Les différences ~~entre~~ consécutives ces valeurs peuvent être égales ou inégales. Soient $y_0\ y_1\ y_2 \cdots y_n$ les valeurs correspondantes de y. Je pose

$$x_1 - x_0 = h_0 \quad x_2 - x_1 = h_1 \; \ldots \; x_n - x_{n-1} = h_{n-1}$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = p_0 \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = p_1 \; \cdots \; \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = p_{n-1}.$$

d'où $y_1 - y_0 = p_0 h_0 \quad y_2 - y_1 = p_1 h_1 \; \cdots \; y_n - y_{n-1} = p_{n-1} h_{n-1}$

enfin $\dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = P.$ (A)

(A) On suppose que la fonction est ~~toujours~~ continue ~~croissante ou décroissante~~ depuis x_n jusqu'à x_0. Si cela n'avait pas lieu on supposerait la fonction partagée en plusieurs autres qui jouissent de cette propriété.

En ajoutant les 1res valeurs on aura

$$x_n - x_0 = h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}$$

en ajoutant les 3me

$$y_n - y_0 = p_0 h_0 + p_1 h_1 + \cdots + p_{n-1} h_{n-1},$$

~~d'où~~ Or $y_n - y_0 = P(x_n - x_0) = Ph_0 + Ph_1 + \cdots + Ph_{n-1}$

~~$\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = P =$~~

donc $Ph_0 + Ph_1 + \cdots + Ph_{n-1} = p_0 h_0 + p_1 h_1 + \cdots + p_{n-1} h_{n-1}$.

D'après cette égalité on voit que P doit être compris entre la > et la < valeur des p. Car si P était $\gtrless$ que toutes les valeurs de p tous les termes du 1r membre seraient $\gtrless$ ceux du 2d et l'égalité ne pourrait pas subsister. Or c̄o N est quelconque on peut le supposer assez grand pour que la différence entre deux valeurs quelconques consécutives de $x_1\ x_2\ x_3 \cdots$ puisse être considérée c̄o nulle. Si alors tous les rapports c.à.d. ts les p. sont $0\ \infty$ ou constants P qui est compris entre la > et la < valeur des p sera aussi $0\ \infty$ ou constant. c.à.d. qu'on aura $\dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = 0, \infty$ ou constant c.à. ou bien $\dfrac{Y - y}{X - x} = 0, \infty$ ou constant avant l'hypothèse $X = x$. C. q. f. d.

Nous voyons d'après cela qu'en général le rapport des accroissements pour une fonction de x et de y est une fonction de x. Cette fonction se représente par $f'(x)$ et se nomme la fonction dérivée de $f(x)$.

Trouver les fonctions dérivées de toutes sortes de fonctions et les représenter par des signes, tel est le but du calcul différentiel.

Proposons nous de trouver les fonctions dérivées de toutes sortes de fonctions.

Soit d'abord $y=f(x)=x+a$.

$$\frac{X+a-x-a}{X-x}=1 \quad \text{d'où } f'(x)=1$$

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{a-X-a+x}{X-x}=-1 \quad \text{d'où } f'(x)=-1$$

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{aX-ax}{X-x}=a \quad \text{d'où } f'(x)=a.$$

On parviendrait au même résultat si on avait la fonction $y=ax+b$. c.à.d. que la fonction dérivée de l'éq. d'une droite quelconque est constante et égale à la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x; ce qu'on savait déjà.

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{\frac{a}{X}-\frac{a}{x}}{X-x}=\frac{ax-aX}{(X-x)Xx}=-\frac{a}{Xx} \quad \text{d'où } f'(x)=-\frac{a}{x^2}.$$

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{X^m-x^m}{X-x}=X^{m-1}+X^{m-2}x+\cdots+x^{m-1}$$

faisant $X=x$ on a $f'(x)=mx^{m-1}$.

La fonction dérivée sera la même si m est fractionnaire et négatif.

En effet supposons qu'on ait la fonction $y=x^{\frac{n}{p}}$. nous aurons

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{X^{\frac{n}{p}}-x^{\frac{n}{p}}}{X-x}$$

posons $X^{\frac{1}{p}}=Z$ et $x^{\frac{1}{p}}=z$. on aura

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{Z^n-z^n}{Z^p-z^p}$$

$y=x+a$ - - - -
$dy=dx$

$y=a-x.$ - - -
$dy=-dx$

$y=ax$ - - - - - -
$dy=a\,dx$

$y=\frac{a}{x}$ - - -
$dy=-\frac{a}{x^2}dx$

$y=x^m$ - - - - - -
$dy=mx^{m-1}dx.$

Supprimant le facteur commun $Z - z$ on aura

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{Z^{n-1} + Z^{n-2}z + \dots z^{n-1}}{Z^{p-1} + Z^{p-2}z + \dots z^{p-1}}$$

posant $X = x$

$$f'(x) = \frac{n z^{n-1}}{p z^{p-1}} = \frac{n}{p} z^{n-p}.$$

Or $z = x^{\frac{1}{p}}$ d'où $z^{n-p} = x^{\frac{n-p}{p}} = x^{\frac{n}{p}-1}$ donc

$$f'(x) = \frac{n}{p} x^{\frac{n}{p}-1}.$$

Soit $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ n étant entier ou fractionnaire.

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\frac{1}{X^n} - \frac{1}{x^n}}{X-x} = \frac{x^n - X^n}{(X-x)(X^n x^n)} = -\frac{1}{X^n x^n}(X^{n-1} + X^{n-2}x + \dots + x^{n-1})$$

faisant $X = x$ $f'(x) = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}.$

$y = a^x \dots\dots$

$dy = a^x \, la \, dx$

$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{a^X - a^x}{X-x}$ je pose $X - x = h$ et on aura

$$f'(x) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \times \frac{a^h - 1}{h}.$$

L'expression $\frac{a^h-1}{h}$ ne peut être ni zéro ni infinie parce qu'alors $f'(x)$ serait 0 ou ∞ et la fonction serait une ligne droite, ce qui n'a pas lieu.

Je représente par $\varphi(a)$ l'expression $\frac{a^h-1}{h}$ lorsque h est assez petit pour être considéré comme égal à zéro, et je dis que $\varphi(a)$ est le log. de a ds une certaine base. En effet posons $a^h - 1 = b$, si a n'est ni 0 ni 1. a^h s'approchera d'autant plus de 1 que h sera plus petit. On tire de cette égalité

$$a^{mh} = (b+1)^m = 1 + mb + \frac{m(m-1)}{2} b^2 + \dots$$

et par suite

$$\frac{a^{mh} - 1}{mh} = \frac{b + \frac{m-1}{2} b^2 + \dots}{h}$$

si b est assez petit pour que b^2 puisse être négligé on aura

$$\frac{a^{mh} - 1}{mh} = \frac{b}{h}.$$

Mais $\frac{a^h-1}{h} = \frac{b}{h}$ par const.

$$\frac{a^{mh}-1}{mh} = \frac{a^h-1}{h} \text{ ou } \frac{(a^m)^h-1}{h} = m.\frac{a^h-1}{h}$$

c.a.d. $\varphi(a^m) = m\,\varphi(a)$

Mais dans les fonctions qui jouissent de cette propriété on a $\varphi(a) = K\,\mathcal{L}a$. c.q.f.d.

De cette dernière égalité on tire $\mathcal{L}a = \frac{\varphi(a)}{K}$. b représentant la base du système nous aurons

$$a = b^{\mathcal{L}a} = b^{\frac{\varphi(a)}{K}} = \left(b^{\frac{1}{K}}\right)^{\varphi(a)}.$$

Posons $b^{\frac{1}{K}} = e$ on aura $a = e^{\varphi(a)}$ d'où $\varphi(a) = la$, ds le système dont la base est e. Donc enfin

pour $y = a^x$ $f'(x) = a^x . la$.

On a calculé l'expression $\frac{a^h-1}{h}$ en faisant $a = 10$. Si on prend pour h $\frac{1}{2^{60}} = \frac{1}{262144}$ on aura

$a^h = \sqrt[262144]{10} = 1,00000175675$. et par suite

$\frac{a^h-1}{h} = 2,30259$ (A) Pour calculer $\sqrt[2^{60}]{10}$ il faut faire une suite d'extraction de $\sqrt{}$. Cependant on peut diminuer le nombre des opérations en observant que si lorsqu'on est parvenu à $\sqrt[2^z]{10}$ on a un résultat qui contienne après la 1re décimale caractéristique la ½ autant de zéros qu'on veut en avoir de décimales exactes au résultat, on peut terminer l'opération à la racine 2^z. Pour le démontrer il faut faire voir que dans ce cas le résultat qu'on obtient en faisant $h = \frac{1}{2^z}$ est sensiblement le même que celui qu'on aurait en faisant $h = \frac{1}{2^{z+1}}$. — Quand $h = \frac{1}{2^z}$, $\frac{10^h-1}{h}$ devient $2^z\left(\sqrt[2^z]{10}-1\right)$

Faisons $\sqrt[2^z]{10} = 1+b$. on aura $\frac{10^{\frac{1}{2^z}}-1}{\frac{1}{2^z}} = 2^z . b$.

Si $h = 2^{z+1}$ $\frac{10^h-1}{h}$ sera $2^{z+1}\left(\sqrt[2^{z+1}]{10}-1\right)$. Mais $\sqrt[2^{z+1}]{10} = \sqrt{b+1}$

Donc $\varphi(10) = 2^{z+1}\left(\sqrt[2^{z+1}]{10}-1\right) = 2^{z+1}\left(\sqrt{1+b}-1\right) = 2^{z+1}\left(\frac{b}{2} - \frac{b^2}{8} \cdots\right)$

Mais puisque la 1re moitié des décimales qu'on prend pour b sont des zéros b^2 peut être négligé, donc

$$\frac{h^{\frac{1}{2^{z+1}}}-1}{\frac{1}{2^{z+1}}} = 2^{z+1}\cdot\frac{b}{2} = 2^z b = \frac{h^{\frac{1}{2^z}}-1}{\frac{1}{2^z}} \quad \text{Dc \&c} —$$

(A) Le nombre 2,30259 est le log. népérien de 10 par const $\frac{1}{2,30259} = 0,4342$ est le module qui sert à passer du système népérien au système décimal.

On peut trouver à quoi est égale la quantité e qui est la base du système Népérien. En effet puisqu'on a $\frac{a^h-1}{h} = l.a$, a étant quelconque, on aura aussi $\frac{e^h-1}{h} = le = 1$. Je peux poser $h = \frac{1}{m}$ m étant une quantité très grande et on aura

$$e^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m} \quad \text{d'où } e = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \text{ oubien développant}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{m}}{2} + \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})}{2.3} + \cdots$$

Puisque h est très petit m est fort grand et les quantités $\frac{1}{m}$ $\frac{2}{m}$ ... peuvent être négligées. On aura donc

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots = 2,718281828\ldots$$

$y = \mathcal{L}x.$

$dy = \frac{\mathcal{L}e\, dx}{x}$

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\mathcal{L}X - \mathcal{L}x}{X-x} \quad \text{posant } X - x = h$$

$$\frac{\mathcal{L}(x+h) - \mathcal{L}x}{h} = \frac{1}{h}\mathcal{L}\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Si h peut être considéré égal à zéro nous aurons

$$f'(x) = \frac{1}{h}\mathcal{L}\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\mathcal{L}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\mathcal{L}(1+h')^{\frac{1}{h'}}$$

où h' sera extrêmement petit. Mais nous avons

$$\frac{e^h-1}{h} = 1 \quad \text{d'où } e = (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

h étant quelconque, mais cependant extrêmement petit. On pourra donc poser

$$f'(x) = \frac{1}{x}\mathcal{L}(1+h')^{\frac{1}{h'}} = \frac{1}{x}\mathcal{L}e.$$

Ainsi en prenant les log. ds le système décimal on aura pour $y = \mathcal{L}x$

$$f'(x) = \frac{\mathcal{L}e}{x} = \frac{le\,(0,4342)}{x} = \frac{0,4342}{x}$$

0,4342 étant le module du système Népérien.

Mais $le = 1$ donc

$$f'(x) = \frac{0,4342}{x}$$

Pour le système népérien on aurait

$$f'(x) = \frac{le}{x} = \frac{1}{x}$$

$y = \sin x$ - - -
$dy = \cos x\, dx$

(x)
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b)$
$a+b = X$ $a-b = x$ d'où
$a = \frac{X+x}{2}$ $b = \frac{X-x}{2}$
$\sin X - \sin x = 2\cos\frac{X+x}{2}\sin\frac{X-x}{2}$

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\sin X - \sin x}{X-x}.$$

Mais on démontre en trigonométrie que

$$\sin X - \sin x = 2\cos\frac{X+x}{2}\sin\frac{X-x}{2}. \quad (x)$$

De

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{2\cos\frac{X+x}{2}\sin\frac{X-x}{2}}{X-x}$$

Mais $X-x$ étant la différence de deux arcs, cette différence est $> 2\sin\frac{X-x}{2}$ et $< 2\tang\frac{X-x}{2}$, Donc

$$\frac{Y-y}{X-x} < \frac{\cos\frac{X+x}{2}\sin\frac{X-x}{2}}{\sin\frac{X-x}{2}} \text{ ou } \cos\frac{X+x}{2},$$

$$\frac{Y-y}{X-x} > \frac{\cos\frac{X+x}{2}\sin\frac{X-x}{2}}{\tang\frac{X-x}{2}} \text{ ou } \cos\frac{X+x}{2}\cos\frac{X-x}{2}$$

Mais $\cos X + \cos x = 2\cos\frac{X+x}{2}\cos\frac{X-x}{2}$ par const.

$$\frac{Y-y}{X-x} > \frac{\cos X + \cos x}{2}.$$

Lorsque $X = x$ $\frac{\cos X + \cos x}{2}$ et $\cos\frac{X+x}{2}$ deviennent égaux à $\cos x$; par const.

$$f'(x) = \cos x.$$

La dérivée de la fonction $y = \arcsin x$ ne peut pas s'obtenir directement, mais on y parvient au moyen du principe que nous allons poser.

Soit $y = f(x)$ une fonction, la dérivée sera $f'(x) = \frac{Y-y}{X-x}$ si on renverse la fonction, c.à.d. qu'on pose $x = F(y)$ on aura $F'(y) = \frac{X-x}{Y-y}$. par conséquent $f'(x) = \frac{1}{F'(y)}$. On voit donc que quand on ne sait pas trouver la dérivée d'une fonction, mais qu'on peut obtenir la dérivée de cette fonction renversée divisant l'unité par cette 2[de] dérivée, on aura la dérivée de la fonction proposée.

On peut donner une autre démonstration de la même proposition.

Soit $y=f(x)$ une fonction quelconque. Je pose

$$\frac{Y-y}{X-x}=f'(x)+u \qquad \frac{X-x}{Y-y}=F'(y)+\xi$$

Multipliant entre elles ces deux expressions nous avons

$$\frac{Y-y}{X-x}\times\frac{X-x}{Y-y}=1=f'(x)F'(y)+\xi f'(x)+uF'(y)+u\xi.$$

u et ξ sont des quantités qui s'approchent de zéro lorsque X s'approche de devenir égal à x. Ainsi la dernière équation se compose de deux parties, l'une constante et l'autre variable. Il faut donc que la partie constante soit égale à la quantité toute connue c.à.d. qu'on ait $f'(x)F'(y)=1$. Car si on avait $f'(x)F'(y)=1+\delta$ on en tirerait

$$\xi f'(x)+uF'(y)+u\xi=-\delta.$$

ce qui ne peut avoir lieu puisque le 1[er] membre de cette éq. est variable. On a donc

$$f'(x)=\frac{1}{F'(y)}.$$

$y=\text{arc sin}\,x.$

$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Proposons nous maintenant de trouver la dérivée de $y=\text{arc sin}\,x$. En renversant cette fonction on a $F(y)=x=\sin y$ d'où $F'(y)=\cos y$

donc $\quad f'(x)=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\cos(\text{arc sin}\,x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Si on veut au moyen du principe que nous venons de démontrer trouver la dérivée de

$$y=\mathcal{L}x \quad \underline{a} \text{ étant la base.}$$

On aura en renversant

$$x=a^y \quad \text{d'où } F'(y)=a^y la.$$

et par suite $f'(x)=\frac{1}{a^y la}=\frac{1}{x\,la}$

Des fonctions de fonctions.

Si dans une fonction on remplace la variable indépendante par une fonction de cette variable on aura une fonction de fonction. Ainsi

$y = f(x) + a$, $y = a - f(x)$ $y = af(x)$ &c

sont des fonctions de fonction.

Proposons nous de trouver les dérivées de ces fonctions.

Soit d'abord $y = F(x) = f(x) + a$ Nous aurons

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{f(X)+a-f(x)-a}{X-x} = \frac{f(X)-f(x)}{X-x}$$

Donc $F'(x) = f'(x)$.

Cherchons la dérivée de

$$y = F(x) = af(x)$$

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{af(X)-af(x)}{X-x} = a.\frac{f(X)-f(x)}{X-x}.$$

Donc . . $F'(x) = af'(x)$.

On trouverait de même les dérivées de toutes les fonctions de fonctions, mais on peut donner une règle générale pour y parvenir.

Soit $z = F(y)$ et $y = f(x)$

d'où $z = F(f(x)) = \varphi(x)$

Je pose $\frac{Z-z}{Y-y} = F'(y) + \zeta$

$$\frac{Y-y}{X-x} = f'(x) + \eta$$

$$\frac{Z-z}{X-x} = \varphi'(x) + \xi$$

Je multiplie les 2 1ers rapports l'un par l'autre et j'ai

$$\frac{Z-z}{Y-y} \times \frac{Y-y}{X-x} = \frac{Z-z}{X-x} = \varphi'(x) + \xi = F'(y)f'(x) + \zeta f'(x) + \eta F'(y) + \eta\zeta.$$

Mais lorsque X devient $= x$ η ζ et ξ deviennent $= 0$

par consᵗ $\varphi'(x) = F'(y)f'(x)$.

Proposons nous de trouver au moyen de cette formule la dérivée de ~~z = y^m~~.

$$z = \sin^m x. = \varphi(x)$$

Je pose $y = \sin x = f(x)$ $\quad z = y^m = \mathcal{F}(y)$

On aura $\varphi'(x) = my^{m-1}\cos x = m\sin^{m-1} x \cos x.$

Soit. $\quad z = \varphi(x) = \text{arc sin} f(x)$

Je pose $\quad y = f(x)$ d'où $z = \text{arc sin}\, y$

donc $\quad \varphi'(x) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}.$

Le théorème que nous venons de démontrer sert à trouver la dérivée d'une fonction quelconque à une variable. Supposons qu'on ait

$$\varphi(x) = z = \psi\{\mathcal{F}(f(x))\}$$

Posant $\quad y = f(x) \quad u = \mathcal{F}(y)$ on aura

$$\varphi(x) = z = \psi\{\mathcal{F}(y)\}.$$

Par const. la dérivée de $\varphi(x)$ est égale à la dérivée de $\mathcal{F}(y)$ multipliée par la dérivée de $\psi(u)$. Or la dérivée de $\mathcal{F}(y)$ est égale à $\mathcal{F}'(y) f'(x)$ On aura donc

$$\varphi'(x) = \psi'(u)\mathcal{F}'(y)f'(x).$$

Si on pose

$$\frac{Y-y}{X-x} = f'(x) + u \quad \text{d'où}$$

$$Y - y = f'(x)(X-x) + u(X-x)$$

u étant une quantité qui devient nulle lorsque X devient égal à x (A), on voit que la différentielle se compose de deux parties, l'une qui est proportionnelle à $X - x$ l'autre qui s'évanouit lorsque $X = x$.

(A) ~~on pose $f'(x)(X-x) = dy$ et on nomme dy la différentielle de y.~~

On ne peut décomposer la différence que d'une manière, car si on pouvait poser

$$Y - y = \varphi(x)(X-x) + \theta(X-x)$$

On en tirerait $\quad \varphi(x) + \theta = f'(x) + u$

$$d'où\ \varphi(x) - f'(x) = \eta - \theta.$$

Le 1er membre est constant, ds le 2d η est variable et peut devenir $= \theta$. On doit donc avoir

$$\varphi(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad \theta = \eta.$$

La 1re partie $f'(x)(X-x)$ de la différence se nomme la différentielle de y et s'écrit dy, ainsi

$$dy = f'(x)(X-x).$$

On pose de même $dx = X - x$. ~~Et d'après cette convention on aura $f'(x) = \frac{dy}{dx}$~~

C'est ainsi qu'on représente la dérivée en général.

~~On voit que la différentielle sera égale à la différence lorsque η sera égal à zéro.~~

Nous aurons pour les fonctions simples.

$y = x + a \quad \ldots \quad f'(x) = 1 = \frac{dy}{dx} \qquad dy = dx.$

$y = a - x \qquad f'(x) = -1 = \frac{dy}{dx} \qquad dy = -dx.$

$y = ax \qquad f'(x) = a = \frac{dy}{dx} \qquad dy = adx.$

$y = \frac{a}{x} \qquad f'(x) = -\frac{a}{x^2} = \frac{dy}{dx} \qquad dy = -\frac{adx}{x^2}.$

$y = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1} = \frac{dy}{dx} \qquad dy = nx^{n-1}dx.$

$y = a^x \qquad f'(x) = a^x la = \frac{dy}{dx} \qquad dy = a^x la\,dx.$

$y = \mathcal{L}x \quad \ldots \quad f'(x) = \frac{\mathcal{L}e}{x} = \frac{dy}{dx} \qquad dy = \frac{dx\mathcal{L}e}{x}$

$y = \sin x \qquad f'(x) = \cos x = \frac{dy}{dx} \qquad dy = \cos x\,dx.$

$y = \arc\sin x \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{dx} \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

D'après l'éq. $Y - y = f'(x)(X-x) + \eta(X-x)$ on voit que pour que la différentielle soit égale à la différence il faut qu'on ait $\eta = 0$ (A) alors on aura $Y - y = f'(x)(X-x)$ et comme $f'(x)$ est constant cette éq. représente une ligne droite - Dc se

Si la fonction devient

$$y = x$$

On aura

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x} = \frac{X-x}{X-x} = 1$$

Par const. lorsqu'on fera $X = x$ cette expression sera encore égale à 1. Ainsi pour la droite $y = x$ la différentielle est égale à 1 c.à.d. qu'on a

$$f'(x) = 1 \text{ d'où } dy = (X-x)$$

Mais y est égal à x donc

$$dx = (X-x)$$

Or quelle que soit la courbe représentée par la fonction la différence de la variable est la même que pour la droite $y = x$. Donc pour une ~~droite~~ courbe quelc.

$$dx = X - x.$$

(A) En effet cette éq. peut se mettre sous la forme

$$\frac{Y-y}{dy} = 1 + \frac{\eta}{f'(x)}$$

Lorsque $\eta = 0$ on a

$$Y - y = dy \quad \text{c.q.f.d.}$$

Cherchons la différentielle d'une fonction de fonction. Soit $z = \varphi(x) = \mathcal{F}(f(x))$ nous aurons

$$\varphi'(x) = \mathcal{F}'(y) \cdot f'(x).$$

~~on a~~ En posant $z = \mathcal{F}(y)$, $y = f(x)$

Mais ces deux dernières fonctions donnent

$$\mathcal{F}'(y) = \frac{dz}{dy} \cdot f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Donc $$\varphi'(x) = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}.$$

ou bien $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}.$$

Cette dernière éq n'est pas une identité. En effet dans le facteur $\frac{dz}{dy}$ du 2d membre dy représente $Y - y$ et ds le facteur $\frac{dy}{dx}$ dy représente $f'(x)(X - x)$. Dans le 1r membre dz représente $\varphi'(x)(X - x)$ et ds le 2d dz représente $\mathcal{F}'(y)(Y - y)$.

On trouverait de la même manière la différentielle d'une fonction de la forme

$$u = \varphi(x) = T\{\mathcal{F}(f(x))\}$$

En posant $y = f(x)$ $z = \mathcal{F}(y)$

La dérivée de $\varphi(x)$ sera égale à la dérivée de $T(z)$ multipliée par la dérivée de $\mathcal{F}(y)$. Mais la dérivée de $\mathcal{F}(y)$ est $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Donc.

$$\varphi'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Soit $$u = l\sqrt{a^2 + \sin^2 x} = \varphi(x)$$

Je pose $\sqrt{a^2 + \sin^2 x} = v$, $a^2 + \sin^2 x = y$ $\sin x = z$

d'où $u = l\,v.$ $v = \sqrt{y}$ $y = z^2$ $z = \sin x.$

Je pose $z = \sin x$ parceque la dérivée de $a^2 + \sin^2 x$ est la même que celle de $\sin^2 x$. Nous aurons

$$du = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot 2z\cdot\cos x\cdot dx.$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{a^2+\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+\sin^2 x}}\cdot 2\sin x\cdot\cos x\cdot dx = \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2+\sin^2 x}.$$

D'après cette règle il sera facile de trouver les ~~dérivées~~ différentielles de toutes les fonctions suivantes.

$z = f(x)+a$ . . . . $dz = f'(x)dx.$

$z = a-f(x)$ . . . . . $dz = -f'(x)dx$

$z = af(x)$ . . . . $dz = af'(x)dx.$

$z = \dfrac{a}{f(x)}$ . . . . $dz = -\dfrac{a}{f(x)^2}\cdot f'(x)dx.$

$z = f(x)^m$ . . $dz = mf(x)^{m-1}f'(x)dx.$

$z = a^{f(x)}$ . . . . . . $dz = a^{f(x)}la\,f'(x)dx.$

$z = \mathcal{L}f(x)$ . . . . $dz = \dfrac{\mathcal{L}e}{f(x)}f'(x).dx.$

$z = \sin f(x)$. . . $dz = \cos f(x).f'(x).dx.$

$z = \operatorname{arc}\sin f(x)$ . . . $dz = \dfrac{f'(x)dx}{\sqrt{1-f(x)^2}}.$

Par exemple pour la différentielle de $z = \operatorname{arc}\sin\mathcal{L}x$

On aurait $dz = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\mathcal{L}x)^2}}\times\dfrac{\mathcal{L}e}{x}.dx = \dfrac{\mathcal{L}e.dx}{x\sqrt{1-(\mathcal{L}x)^2}}.$

On peut encore demander les différentielles des fonctions:

$z = f(x+a)$ . . . . . $dz = f'(x+a)dx$

$z = f(a-x)$ . . . . $dz = -f'(a-x)dx.$

$z = f(ax)$ . . . . $dz = f'(ax)adx.$

$z = f(\frac{a}{x})$ . . . . . $dz = f'(\frac{a}{x})(-\frac{a\,dx}{x^2})$

$z = f(x^m)$ . . $dz = f'(x^m)mx^{m-1}dx$

$z = f(a^x)$ . . . . . $dz = f'(a^x)a^x\,la\,dx.$

$z = f(\mathcal{L}x)$ . . . . $dz = f'(\mathcal{L}x)\dfrac{\mathcal{L}e\,dx}{x}$

$z = f(\sin x)$ . . . . $dz = f'(\sin x)\cos x\,dx.$

$z = f(\operatorname{arc}\sin x)$ . . . $dz = f'(\operatorname{arc}\sin x)\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

$y = \cos x$
$dy = -\sin x\, dx$

$y = \text{arc}\cos x$
$dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Exemples.

Soit proposé de différentier $z = \cos x$. Je pose

$$z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

d'où $dz = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1 . dx) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$

$$dz = -\sin x\, dx.$$

Cherchons la différentielle de $z = \text{arc}\cos x$. Je pose

$$z = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin x. = \frac{\pi}{2} - y$$

$dz = (-1)$ ~~[illegible]~~ dy or $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ donc

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour $z = \dfrac{1}{lx}$ on aura

$$dz = -\frac{1}{(lx)^2} \cdot \frac{1}{x} . dx = -\frac{dx}{x(lx)^2}$$

Soit $z = a^{b^x}$ on pose

$$z = a^y \quad y = b^x \text{ on aura}$$

$$dz = a^y la\, dy = a^{b^x} la\, b^x lb\, dx = a^{b^x} b^x la\, lb . dx$$

De même pour $z = a^{b^{c^x}}$ en posant

$$z = a^u \quad u = b^v \quad v = c^x \text{ on aura}$$

$$dz = a^u la\, du = a^u la\, b^v lb\, dv = a^u la\, b^v lb\, c^x lc\, dx$$

$$dz = a^{b^{c^x}} . b^{c^x} . c^x . la . lb . lc\, dx.$$

Différentiation des fonctions à plusieurs variables.

Lorsqu'on a une fonction à plusieurs variables, 3 par ex. on appelle <u>différentielle partielle</u> le résultat qu'on obtient en faisant varier une des lettres et considérant les autres constantes. On appelle <u>différentielle totale</u> le résultat qu'on obtient en faisant varier les trois variables.

Soit la fonction à trois variables

$$u = f(x, y, z)$$

Je fais varier successivement chacune des variables et je pose

$$u_1 = f(X, y, z) \quad u_2 = f(x, Y, z) \quad u_3 = f(x, y, Z)$$

$$\frac{u_1 - u}{X - x} = \frac{du}{dx} + \delta_1 \sout{dx}$$

$$\frac{u_2 - u}{Y - y} = \frac{du}{dy} + \delta_2 \sout{dy}$$

$$\frac{u_3 - u}{Z - z} = \frac{du}{dz} + \delta_3 \sout{dz}.$$

$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ sont des quantités qui deviennent nulles ~~lorsque $X = x$~~. Dans la valeur de u je fais varier x et je pose

$$U_1 = f(X, y, z).$$

Ds la valeur de U_1 je fais varier y et je pose

$$U_2 = f(X, Y, z)$$

Enfin ds U_2 je fais varier z et je pose

$$U = f(X, Y, Z).$$

On aura

$$U_1 - u = f'_x(x, y, z)(X-x) + \omega_1 \ldots (X-x)$$

$$U_2 - U_1 = f'_y(X, y, z)(Y-y) + \omega_2 (Y-y)$$

$$U - U_2 = f'_z(X, Y, z)(Z-z) + \omega_3 \ldots (Z-z)$$

ajoutant $U - u = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(X, y, z)dy + f'_z(X, Y, Z)dz$
$+ \omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz.$

$f'_x(x,y,z)$ indique qu'on prend la dérivée de $f(x,y,z)$ en faisant varier x seulement. Si dans la valeur de $V-u$ on pose $X=x$ les ω s'évanouiront et on aura

$$du = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz.$$

ou bien $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$

Le raisonnement que nous venons de faire étant indépendant du nombre des variables, on voit que la différentielle totale d'une fonction à plusieurs variables est égale à la somme des différentielles partielles.

Soit proposé de différentier la fonction

$$u = x^2 - yz$$

nous aurons $du = 2x\,dx - z\,dy - y\,dz.$

Pour $u = \frac{x\,ly}{z}$

On trouve $du = \frac{ly}{z}dx + \frac{x\,le}{yz}dy - \frac{x\,ly}{z^2}dz.$

Pour $u = x^y$

on aura $du = yx^{y-1}dx + x^y lx\,dy$

ou bien $du = x^y\left(\frac{y\,dx}{x} + lx\,dy\right).$

Pour $u = ax + by - cz + g$

$$du = a\,dx + b\,dy - c\,dz.$$

Pour $u = xyz$

$$du = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

~~Si les fonctions étant composé de plusieurs fonctions des variables différentes la règle pour trouver la différentielle serait encore la même~~ ~~Ainsi~~ pour $u = ax^n + b\,ly - c\sin z + g$ on aura

$$du = anx^{n-1}dx + \frac{b\,le\,dy}{y} - c\cos z\,dz.$$

La fonction $u = x^m ly\cos z$ donne

$$du = ly\cos z\,mx^{m-1}dx + \frac{x^m\cos z\,le\,dy}{y} - x^m ly\sin z\,dz.$$

Il y a une autre méthode plus ancienne que celle que nous venons de donner pour différentier les fonctions à plusieurs variables.

Soit la fonction $u = x^2 - yz$. Je pose

$x = x + dx \quad y = y + dy \quad z = z + dz$. j'aurai

$U = (x+dx)^2 - (y+dy)(z+dz)$

$U = x^2 + 2xdx + dxdx - yz - ydz - zdy - dzdy.$

$U - u = 2xdx + dxdx - ydz - zdy - dydz.$

Si on fait $X = x$ il faudra effacer les termes ds les quels ~~les termes ou~~ dy dz ou dx sont deux fois comme facteurs, et on aura

$du = 2xdx - ydz - zdy$ ~~-dydz~~

qui est la même expression que ns avions déjà obtenue

Soit $u = \frac{y}{x}$ je pose $x = x + dx \quad y = y + dy$.

$$U - u = \frac{y+dy}{x+dx} - \frac{y}{x} = \frac{xy + xdy - xy - ydx}{x^2 + xdx}$$

Je divise $\quad 1 \quad -\frac{dx}{x} \quad \Big| \; x^2 + xdx \quad ; \quad \frac{1}{x^2} - \frac{dx}{x^3 + x^2dx}$

par const.

$$U - u = (xdy - ydx)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{dx}{x^3 + x^2dx}\right)$$

$$U - u = \frac{xdy - ydx}{x^2} - \frac{xdy - ydx}{x^3 + x^2dx}\,dx.$$

Effaçant le dernier terme ds le quel les différentielles entrent deux fois cõ facteur on aura

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

Par la 1re méthode que nous avons donnée on aurait écrit de suite

$$du = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

Différentiation des fonctions composées.

La règle que nous venons de donner pour trouver la différentielle d'une fonction à plusieurs variables sert à trouver la différentielle d'une fonction composée à une seule variable.

En effet soit la fonction

$$u = \mathcal{F}\{f(t), f_1(t), f_2(t)\}$$

Je pose $x = f(t) \quad y = f_1(t) \quad z = f_2(t)$

J'aurai $u = f(x, y, z)$

$$v = f(X, Y, Z).$$

$$v - u = \mathcal{F}'_x(x,y,z)(X-x) + \mathcal{F}'_y(x,y,z)(Y-y) + \mathcal{F}'_z(x,y,z)(Z-z)$$
$$+ \omega(X-x) + \omega_1(Y-y) + \omega_2(Z-z).$$

Or $X - x = dx + \xi dt$, $Y - y = dy + \eta dt \quad Z - z = dz + \zeta dt$

Substituant on a

$$v - u = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dx}\xi dt + \frac{du}{dy}\eta dt + \frac{du}{dz}\zeta dt$$
$$+ \omega dx + \omega \xi dt + \omega_1 dy + \omega_1 \eta dt + \omega_2 dz + \omega_2 \zeta dt.$$

Mais lorsque v devient égal à u on a $\xi, \eta, \zeta = 0$ par const.

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Soit proposé de différentier

$$u = t^m \mathcal{L}t \sin t \quad \text{. on aura}$$

$$du = \left(\mathcal{L}t \sin t \, m t^{m-1} + t^m \sin t \frac{\mathcal{L}e}{t} + t^m \mathcal{L}t \cos t\right) dt.$$

Pour $u = \operatorname{tang} t.$

on pose $u = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

d'où $du = \dfrac{\cos t}{\cos^2 t} dt + \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \sin t \, dt.$

$$du = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

$y = \operatorname{tang} x.$

$dy = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

$y = \text{arc tang}\, x$

$dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$

Si on a $f(y) = u = \text{arc tang}\, y$

Je renverse la fonction et j'aurai

$$F(u) = y = \text{tang}\, u$$

$$F'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$$

donc $\qquad f'(y) = \cos^2 u = \dfrac{1}{1+y^2}$

$$\text{d'où } du = \frac{dy}{1+y^2}.$$

Pour $\qquad u = \sin^{\cos t} t.$

$$du = \cos t \sin^{\cos t - 1} t\, dt + \sin^{\cos t} t . l \sin t\, dt$$

$$du = \sin^{\cos t} t \left(\frac{\cos t\, dt}{\sin t} + l \sin t\, dt \right)$$

La même formule sert encore à différentier les fonctions composées à plusieurs variables. Soit

$$u = F\{ f(s,t)\ f_1(s,t),\ f_2(s,t) \}$$

Je pose $\quad x = f(s,t)\ ,\ y = f_1(s,t)\ z = f_2(s,t).$

Nous aurons

$$X - x = f'_s(s,t)\, ds + f'_t(s,t)\, dt + \xi\, ds + \xi_1\, dt$$

$$Y - y = f'_{1s}(s,t)\, ds + f'_{1t}(s,t)\, dt + \eta\, ds + \eta_1\, dt.$$

$$Z - z = f'_{2s}(s,t)\, ds + f'_{2t}(s,t)\, dt + \zeta\, ds + \zeta_1\, dt.$$

Mettant ces valeurs dans la formule

$$U - u = F'_x(x,y,z)(X-x) + F'_y(x,y,z)(Y-y) + F'_z(x,y,z)(Z-z)$$
$$+ \omega(X-x) + \omega_1(Y-y) + \omega_2(Z-z).$$

On aura, en effaçant les termes qui s'évanouissent

$$du = F'_x(x,y,z)(f'_s(s,t)\, ds + f'_t(s,t)\, dt) + F'_y(x,y,z)(f'_{1s}(s,t)\, ds + f'_{1t}(s,t)\, dt)$$
$$+ F'_z(x,y,z)(f'_{2s}(s,t)\, dt + f'_{2t}(s,t)\, dt)$$

ou bien

$$du = \frac{du}{dx}\left(\frac{dx}{ds} ds + \frac{dx}{dt} dt\right) + \frac{du}{dy}\left(\frac{dy}{ds} ds + \frac{dy}{dt} dt\right) + \frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{ds} ds + \frac{dz}{dt} dt\right)$$

ou enfin

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz.$$

Exemple

$u = s^2t^2 + (s+\sin t)(s+\cos t) - st(s+\sin t)(s+\cos t)$

Je pose $x = st \quad y = s+\sin t \quad z = s+\cos t$

d'où $u = x^2 + yz - xyz$.

$du = 2xdx + zdy + ydz - yzdx - xzdy - xydz$.

Substituant à la place de x, y, z leurs valeurs

$$du = 2st(sdt + tds) + (s+\cos t)(ds + \cos t dt) + (s+\sin t)(ds - \sin t dt)$$
$$- (s+\sin t)(s+\cos t)(sdt + tds) - st(s+\cos t)(ds + \cos t dt)$$
$$- st(s+\sin t)(ds - \sin t dt)$$

Réunissant ds l'un seul terme toutes les quantités qui multiplient ds et toutes celles qui multiplient dt on aura la valeur de du.

Différenciation des fonctions implicites.

Si une fonction implicite est exprimable on peut toujours la mettre sous la forme

$$u = F(x, y) = 0$$

y étant une fonction de x on pourra poser $y = f(x)$ f. étant une fonction inconnue et on aura

$$v = F(x, f(x)) \quad \text{et} \quad V = F(X, f(X)).$$

$$V - u = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \omega dx + \omega_1 dy$$

Mais $V - u = 0$ et ω et ω_1 sont variables on doit avoir

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0 \quad \text{et} \quad \omega dx + \omega_1 dy = 0.$$

De la 1re de ces ég. on tire $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}. \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dx}}.$$

Ex. $x^2+y^2-a^2=0$ la formule donnera

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$

d'où $dy = -\dfrac{x\,dx}{y}$

Cette éq. pouvant être résolue ou en tire

$$y=+\sqrt{a^2-x^2} \qquad y=-\sqrt{a^2-x^2}$$

La 1re de ces fonctions donne

$$dy = -\frac{2x\,dx}{2\sqrt{a^2-x^2}} \text{ ou } -\frac{x\,dx}{y}$$

la 2de donne

$$dy = +\frac{2x\,dx}{2\sqrt{a^2-x^2}} \text{ ou } \frac{x\,dx}{-y} \quad dy = -\frac{x\,dx}{y}$$

valeur que nous avions déjà obtenue.

Soit la fonction

$$u = x^3+y^3-3axy=0$$

Cette courbe est terminée dans le sens des x et des y positifs. Si on veut chercher les points où elle coupe la ligne $y=x$ on aura

$$2x^3-3ax^2=0 \quad \text{ou} \quad x^2(2x-3a)=0$$

d'où $x=0 \quad x=0 \quad x=\dfrac{3a}{2}$.

Par cons.^t la courbe passe deux fois à l'origine. Si on prend $OA=\dfrac{3a}{2}$ le p.^t B sera un point de la courbe. Lorsqu'on donnera à x et à y des valeurs négatives le 1^r membre de l'éq. sera touj.^s négatif; par cons.^t la courbe n'a aucun point situé entre les x et les y négatifs. Si on veut trouver $\dfrac{dy}{dx}$ ou la tangente de l'angle que la tangente en un point quelconque fait avec l'axe des x on aura

$$du = 3x^2dx + 3y^2dy - 3ay\,dx - 3ax\,dy = 0$$

$$(x^2 - ay)\,dx + (y^2 - ax)\,dy = 0$$

d'où $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Soit pour troisième exemple la fonction

$$u = x^y - y^x = 0$$

la formule $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0$ deviendra

$$(yx^{y-1} - y^x ly)\,dx + (x^y lx - xy^{x-1})\,dy = 0$$

d'où $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^x ly - yx^{y-1}}{x^y lx - xy^{x-1}} \overset{(a)}{=} \frac{ly - \frac{y}{x}}{lx - \frac{x}{y}} = \frac{xyly - y^2}{xylx - x^2}.$$

(a) puisque $y^x = x^y$ on peut diviser le 1^r terme du numérateur et le 2^d du dénominateur par y^x et le 2^d du numérateur et le 1^r du dénominateur par x^y et l'on aura ×

Cette éq. est satisfaite par $y = x$ par const. elle représente la ligne qui passe par l'origine et partage l'angle des deux axes en deux parties égales et en même tems elle représente une courbe: Pour trouver les différents points de la courbe on pose dans l'éq. $\frac{y}{x} = 1 + z$ d'où $y = (1+z)x$. Substituant

$$x^{(1+z)x} = (1+z)^x x^x,\quad x^{x+zx} = (1+z)^x x^x \quad x^{zx} = (1+z)^x.$$

Enfin $x = (1+z)^{\frac{1}{z}}$ et à cause de $y = (1+z)x$

$$y = (1+z)^{1+\frac{1}{z}}.$$

Développant on aura

$$x = 1 + \tfrac{1}{z}z + \frac{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-1\right)}{2}z^2 + \frac{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{z}-2\right)}{2.3}z^3 + \dots$$

$$x = 1 + 1 + \frac{1-z}{2} + \frac{(1-z)(1-2z)}{2.3} + \dots$$

$$y = 1 + \frac{z+1}{z}z + \frac{\frac{z+1}{z}\left(\frac{z+1}{z}-1\right)}{2}z^2 + \frac{\frac{z+1}{z}\left(\frac{z+1}{z}-1\right)\left(\frac{z+1}{z}-2\right)}{2.3}z^3 + \dots$$

$$y = 1 + 1 + z + \frac{(z+1)}{2} + \frac{(z+1)(1-z)}{2.3} + \dots$$

Pour $z = 0$ on aura

$$y = x = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \dots = 2{,}7182818246 = e.$$

Pour $z=1$ on trouve $x=2$ $y=4$ qui sont les seules valeurs entières qui satisfassent à l'équation.

Différentielles de tous les ordres.

De l'expression $y=f(x)$ on tire la dérivée $f'(x)$ en posant

$$\varphi(X,x)=\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=f'(x)+u.$$

et faisant ensuite $X=x$. On aurait aussi pu poser

$$\varphi(X,x)=\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=f'(X)+H.$$

$f'(x)$ et $f'(X)$ sont des fonctions de même nature, car $\varphi(X,x)$ est une fonction symétrique en X et x.

On peut chercher la fonction dérivée de $f'(x)$ et de $f'(X)$ et on aura

$$\varphi'(X,x)=\frac{f'(X)-f'(x)}{X-x}=f''(x)+u'.$$

$$\varphi'(X,x)=\frac{f'(X)-f'(x)}{X-x}=f''(X)+H'.$$

On tirera de même de ces fonctions

$$\varphi''(X,x)=\frac{f''(X)-f''(x)}{X-x}=f'''(x)+u''$$

$$\varphi''(X,x)=\frac{f''(X)-f''(x)}{X-x}=f'''(X)+H''.$$

Nous aurons donc

$$Y-y=f'(x)(X-x)+u(X-x) \qquad dy=f'(x)(X-x)$$

$$Y-y=f'(X)(X-x)+H(X-x) \qquad dY=f'(X)(X-x).$$

$$dY-dy=(f'(X)-f'(x))(X-x)=f''(x)(X-x)^2+u'(X-x)^2.$$

Ainsi $dY-dy$ se compose de deux parties dont la 2de s'évanouit lorsque X devient égal à x, de plus [illegible] La 1re partie se nomme la différentielle du 2d ordre et on écrit $d^2y=f''(x)(X-x)^2=f''(x)dx^2$.

$$d^2Y - d^2y = (f''(X) - f''(x))(X-x)^2$$

$$d^2Y - d^2y = f'''(x)(X-x)^3 + \eta''(X-x)^3.$$

d'où $d^3y = f'''(x)(X-x)^3 = f'''(x)\,dx^3$. aussi de suite

Par conséquent pour la fonction $y=f(x)$ on aura

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \; \cdots \; \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x).$$

Il n'y a pas de terme d^nx, car quand on fait $y=x$ on a $f'(x)=1$ et $f''(x)=0$,

Proposons nous de trouver les différentielles de tous les ordres des fonctions simples.

$$y = a+x \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \; \cdots \; \frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

$$y = a-x \quad \frac{dy}{dx} = -1 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \; \cdots \; \frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

$$y = ax \quad \frac{dy}{dx} = a \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \; \cdots \; \frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

Lorsqu'une fonction donne une constante pour une différentielle toutes les suivantes sont égales à zéro, car la dérivée d'une constante est touj. zéro,

$$y = \frac{a}{x} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2} = -ax^{-2} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2ax^{-3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2.3ax^{-4} \; \cdots \; \frac{d^ny}{dx^n} = \pm 2.3\ldots n\,a x^{-(n+1)}$$

On doit avoir le signe + quand n est pair et le signe − quand il est impair. Ainsi on a les formules

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} = 2.3.4\ldots 2k\,ax^{-(2k+1)}$$

$$\frac{d^{2k+1}y}{dx^{2k+1}} = -2.3.4\ldots(2k+1)\,ax^{-(2k+2)}$$

$$y = x^m \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Si ds cette formule on fait $n = m$ on aura

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1.2.3 \ldots (m-1)m.$$

Cette dérivée étant constante toutes les autres seront zéro

on aura $$\frac{d^{m+p} y}{dx^{m+p}} = 0.$$

Dans cette formule on suppose que m est entier.

$$y = lx. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{le}{x} = le\,x^{-1} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -le\,x^{-2} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 2le\,x^{-3}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \pm\, 2.3.4 \ldots (n-1)\, le\, x^{-n}$$

$$\frac{d^{2K} y}{dx^{2K}} = -\frac{2.3.4 \ldots (2K-1)\, le}{x^{+2K}}$$

$$\frac{d^{2K+1} y}{dx^{2K+1}} = +\frac{2.3.4 \ldots 2K\, le}{x^{2K+1}}.$$

$$y = a^x \quad \frac{dy}{dx} = a^x\, la \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x (la)^2 \quad \frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = a^x (la)^m.$$

Si la fonction était $y = e^x$, on aurait $\frac{d^m y}{dx^m} = e^x$.

Ainsi ds ce cas les dérivées de tous les ordres seraient égales à e^x.

Si on avait $y = e^{-x}$ on aurait

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -e^{-x}.$$

$$\frac{d^{2K} y}{dx^{2K}} = e^{-x} \quad \frac{d^{2K+1} y}{dx^{2K+1}} = -e^{-x}.$$

$$y = \sin x \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \sin x \quad \frac{d^5 y}{dx^5} = \cos x.$$

$$\frac{d^{4K} y}{dx^{4K}} = \sin x, \quad \frac{d^{4K+1} y}{dx^{4K+1}} = \cos x, \quad \frac{d^{4K+2} y}{dx^{4K+2}} = -\sin x, \quad \frac{d^{4K+3} y}{dx^{4K+3}} = -\cos x$$

$y = \cos x.\quad \frac{dy}{dx} = -\sin x \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \sin x$

$$\frac{d^{4K}y}{dx^{4K}} = \cos x.$$

$$\frac{d^{4K}y}{dx^{4K}} = \cos x;\ \frac{d^{4K+1}y}{dx^{4K+1}} = -\sin x;\ \frac{d^{4K+2}y}{dx^{4K+2}} = -\cos x;\ \frac{d^{4K+3}y}{dx^{4K+3}} = \sin x.$$

Enfin pour $y = \arcsin x$ on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x\left(-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x)\right) = \frac{(1+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Nous ne chercherons pas les fonctions dérivées de tous les ordres des fonctions de fonctions parceque cette recherche rentre dans celle des fonctions composées. En effet si nous avons $z = F(f(x)) = \varphi(x)$ nous aurons pour la dérivée $\varphi'(x) = F'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Ainsi pour avoir la fonction dérivée du 2^d ordre il faudrait faire la même opération que sur les fonctions composées.

Occupons nous maintenant de la recherche des dérivées de tous les ordres des fonctions à plusieurs variables.

Je dis d'abord que si on a une fonction $u = f(x, y)$ qu'on prenne la dérivée par rapport à x et ensuite la dérivée de cette dérivée par rapport à y., le résultat sera le même que si on avait pris d'abord la dérivée de u par rapport à y

et ensuite la dérivée de cette dérivée par rapport à x.
C.à.d. qu'on a $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}$.

En effet ns avons $u=f(x,y)$
Je pose $u_1 = f(X,y)$; $u_2 = f(x,Y)$ $U = f(X,Y)$
d'où $u_1 - u = \frac{du}{dx}(X-x) + \xi(X-x)$
$$u_2 - u = \frac{du}{dy}(Y-y) + \eta(Y-y)$$
ou bien $u_1 = u + \frac{du}{dx}dx + \xi dx$. (A)
$$u_2 = u + \frac{du}{dy}dy + \eta dy. \quad (B)$$
Or si ds u_1 on remplace y par Y ns aurons U; de même nous aurons pour résultat U si nous mettons ds u_2 X à la place de x ∴ Lorsqu'on effectuera cette substitution ds (A) le premier terme $u=f(x,y)$ deviendra
$$f(x,Y) = u_2 = u + \frac{du}{dy}dy + \eta dy.$$
Pour savoir ce que devient le 2[d] terme $\frac{du}{dx}dx$ je remarque que du qui est seul fonction d'x et d'y variera seul. Or lorsque ds une fonction $z=f(y)$ on remplace y par Y on a
$$\frac{f(Y)-f(y)}{Y-y} = f'(y) + \eta$$
d'où $f(Y) = f(y) + \frac{dz}{dy}dy + \eta dy$
par consᵗ $\frac{du}{dx}dx$ deviendra lorsqu'on y met Y à la place de y
$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}dy + \eta' dy\right)dx.$$
Enfin ξ étant fonction de y le dernier terme ξdx deviendra $\left(\xi + \frac{d\xi}{dy}dy + \omega dy\right)dx$ que je pose $= (\xi + \xi_1 dy)dx$.

On aura en réunissant tous ces termes.

$$V = u + \frac{du}{dy}dy + \eta dy + \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}dy + \eta' dy\right)dx + (\xi + \xi_1 dy)dx.$$

Si on substitue X à la place de x ds B on aura

$$V = u + \frac{du}{dx}dx + \xi dx + \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}dx + \xi' dx\right)dy + (\eta + \eta_1 dx)dy.$$

Egalant ces deux valeurs de V et réduisant on trouve

$$\eta dy + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}dx\,dy + \eta' dx\,dy + (\xi + \xi_1 dy)dx =$$

$$= \xi dx + \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}dx\,dy + \xi' dx\,dy + (\eta + \eta_1 dx)dy.$$

Les quant $\eta\ \xi\ \eta'$ ... sont variables, il faut donc qu'on ait $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}$ c.q.f.d.

Proposons nous maintenant de trouver la dérivée du 2^d ordre, de

$$u = f(x \cdot y)$$

Nous aurons d'abord

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy. \quad (A)$$

Or lorsqu'on a une fonction à une seule variable $z = f(x)$ on aura $dz = \frac{dz}{dx}dx$ et

$$dZ - dz = (f'(X) - f'(x))dx$$

On voit donc que lorsqu'on remplace z par Z ds la 1re dérivée dz le dx reste toujs en facteur. par const. le dx et le dy resteront aussi lorsqu'on remplacera u par V ds l'expression (A) et on aura

$$d^2u = \left(\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}dx + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}dy\right)dx + \left(\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}dx + \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dy}dy\right)dy.$$

Mais nous venons de démontrer que $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}$

ns aurons donc en réduisant

$$d^2u = \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}dx^2 + 2\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}dx.dy + \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dy}dy^2.$$

Mais d'après les conventions précédentes $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}$ nous aurons par const.

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2.$$

Soit maintenant la fonction à trois variables

$$u = f(x, y, z)$$

nous aurons

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

le du du 2d membre est fonction de x, y, z. et par conséquent

$$d^2u = \left(\frac{d\frac{du}{dx}}{dx}dx + \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}dy + \frac{d\frac{du}{dx}}{dz}dz\right)dx$$
$$+ \left(\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}dx + \frac{d\frac{du}{dy}}{dy}dy + \frac{d\frac{du}{dy}}{dz}dz\right)dy.$$
$$+ \left(\frac{d\frac{du}{dz}}{dx}dx + \frac{d\frac{du}{dz}}{dy}dy + \frac{d\frac{du}{dz}}{dz}dz\right)dz.$$

Si nous observons que $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d^2u}{dxdy}$ nous aurons

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 +$$
$$2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2u}{dydz}dydz + 2\frac{d^2u}{dxdz}dxdz.$$

Ex. $u = x\sin y - z\cos y$

$$du = \sin y\, dx + (x\cos y + z\sin y)\,dy - \cos y\, dz.$$

Pour avoir d^2u il faut prendre la différentielle de du et comme nous avons vu que dx dy dz restent constants, il faut prendre la différentielle de $\sin y$ celle de $x\cos y + z\sin y$ et celle de $\cos y$ et les multiplier successivement par dx dy dz on aura

$$d^2u = \cos y\,dy\,dx + (\cos y\,dx - x\sin y\,dy + \sin y\,dz + z\cos y\,dy)dy$$
$$+ \sin y\,dy\,dz$$

ou bien

$d^2u = 2\cos y\, dx\, dy + (2\cos y - x\sin y)\, dy^2 + 2\sin y\, dy\, dz.$

2d Exemple $u = x^3y^2 - xly.$

$du = 3x^2y^2dx + 2yx^3dy - lydx - \frac{x}{y}dy$

$du = (3x^2y^2 - ly)dx + (2yx^3 - \frac{x}{y})dy.$

$d^2u = (6xy^2dx + 6yx^2dy - \frac{1}{y}dy)dx + (6x^2ydx + 2x^3dy - \frac{ydx - xdy}{y^2})dy$

Enfin $d^2u = 6xy^2dx^2 + (6yx^2 - \frac{2}{y})dxdy$

$d^2u = 6xy^2dx^2 + 2(6yx^2 - \frac{1}{y})dxdy + (2x^3 + \frac{x}{y^2})dy^2.$

Cherchons maintenant la différentielle du 2d ordre d'une fonction composée soit

$$u = F(f(t), f_1(t))$$

Je pose $f(t) = x$ $f_1(t) = y$ j'aurai

$$u = F(x, y)$$

d'où $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$

ou bien en remplaçant dx et dy par leurs valeurs $du = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}dt + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}dt.$

Or lorsque x et y étaient variables indépendantes ns avons trouvé

$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy.$

Lorsque x et y seront fonction de t il faudra prendre la différentielle de du par rapport à x par rapport à y et par rapport à t. En prenant la différentielle par rapport à x et à y on aura le même résultat que dans la formule générale, après qu'on aura remplacé dx et dy par leurs valeurs

La différentielle par rapport à t de $\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}dt$ est $\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}dt^2$; celle de $\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}dt$ est $\frac{du}{dy}\frac{d^2y}{dt^2}dt^2$. Donc enfin pour $u = F(f(t), f_1(t))$

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right.$$
$$\left. + \frac{du}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt^2.$$

Si dans la fonction $u = F(x, y)$ on a $y = f(x)$ la première différentielle sera

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Mais à cause de $y = f(x)$ on a $dy = \frac{dy}{dx}dx$ dx const.

$$du = \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)dx$$

Différentiant de nouveau nous aurons

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dx\,dy}dy + \frac{du}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}dx + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}dy\right.$$
$$\left. + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\right)dx$$

ou bien

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx^2.$$

Exemples.

$$u = x^{\sin x}$$

$$du = (\sin x\cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x}\,l x\cdot\cos x)\,dx$$

$$d^2u = dx^2\left(\sin x(\sin x - 1)x^{\sin x - 2} + \cos x\, x^{\sin x - 1} + \right.$$
$$+ \sin x\, x^{\sin x - 1}\, l x \cos x + \sin x \cos x\, l x\, x^{\sin x - 1}$$
$$\left. + x^{\sin x}\, l^2 x \cos^2 x + x^{\sin x - 1}\cos x - x^{\sin x}\, l x \sin x\right).$$

$$u = x^m \cos x$$

$$du = (m x^{m-1} \cos x - x^m \sin x)\, dx$$

$$d^2u = (m(m-1)x^{m-2} \cos x - 2m x^{m-1} \sin x - x^m \cos x)\, dx^2.$$

Cherchons la différentielle du 2^d ordre des fonctions implicites. Soit

$$u = \mathcal{F}(x, y) = 0.$$

Nous avons trouvé

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0$$

Mais y étant $f(x)$ nous aurons d'après la formule précédente

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2 = 0.$$

divisant par dx^2 et cherchant la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous aurons.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{du}{dy}}.$$

Exemple

$$u = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$\frac{d(u)}{dx} = 3x^2 - 3ay + (3y^2 - 3ax)\frac{dy}{dx} = 0.$$

$\frac{d(u)}{dx}$ représente la différentielle de u divisé par dx. On aura pour le 2^d ordre

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = 6x - 6a\frac{dy}{dx} + 6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (3y^2 - 3ax)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Mais nous avons déjà trouvé

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}$$ substituant nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}\right)^2}{\frac{du}{dy}}$$

Exemple

$$u = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Nous aurons

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 3ay \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = 6x$$

$$\frac{du}{dy} = 3y^2 - 3ax \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = 6y$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = -3a$$

par conséquent.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6x + 6a\frac{x^2-3ay}{y^2-ax} + 6y\left(\frac{x^2-3ay}{y^2-ax}\right)^2}{3y^2-3ax}.$$

Réduisant il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\frac{a^3xy}{(y^2-ax)^3},$$

Des équations différentielles.

Si dans une fonction

$$u = F(x, y\ a, b) = 0$$

on donne à a et à b différentes valeurs on aura les éq. de toutes les courbes de même nature; Si en cherchant les différentielles des différents ordres on parvient à une éq. qui ne contienne plus de constantes, cette éq. appartiendra à toutes

les courbes de même nature. C'est ce qu'on nomme l'équation différentielle.

Soit par ex. l'ég. de la ligne droite

$$u = y - ax - b = 0$$

Nous aurons

$$\frac{d(u)}{dx} = -a + \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = a$$

et par suite $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

qui est une ég. commune à toutes les lignes droites.

Soit maintenant l'ég. du cercle

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 - c^2 = 0$$

La 1re diff. est $2(y-b)dy + 2(x-a)dx = 0$

divist par dx $(y-b)\frac{dy}{dx} + x - a = 0$

Je différentie de nouveau et je divise par dx

j'aurai $(y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

de même $(y-b)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Pour éliminer b entre les deux dernières ég. j'égale les deux valeurs de $y-b$ ce qui donne

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{d^3y}{dx^3}} \quad \text{ou bien}$$

$$\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

Cette dernière ég. est l'équation différentielle du cercle.

L'équation des sections coniques est

$$y^2 = 2px - nx^2 \quad (A)$$

différentiant $2ydy = (2p - 2nx)dx$

ou bien $y\dfrac{dy}{dx} = p - nx$ (B)

Je différentie de nouveau

$$y\frac{d^2y}{dx^2}dx + \frac{dy}{dx}dy = -ndx$$

Divisant par dx et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur tirée de l'éq. (B) on aura.

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = -n - \frac{p^2 - 2npx + n^2x^2}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ny^2 + p^2 - 2npx + n^2x^2}{y^3}$$

Mettant à la place de y^2 sa valeur $2px - nx^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3} \quad (C)$$

Pour éliminer p et n entre (A) (B) (C) je multiplie (B) par x ce qui donne

$$xy\frac{dy}{dx} = px - nx^2$$

Je la retranche de $\quad y^2 = 2px - nx^2$

$$y^2 - xy\frac{dy}{dx} = px$$

d'où $\quad p = \dfrac{y^2}{x} - y\dfrac{dy}{dx}$.

Mais l'éq. (C) donne

$$p^2 = -y^3\frac{d^2y}{dx^2}$$

égalant les 2 valeurs de p^2 on aura

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -y^2\left(\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}\right)^2$$

d'où $\quad y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

Qui est l'éq. différentielle cherchée.

Proposons nous de reconnaître si une fonction donnée est la différentielle exacte d'une autre fonction. Soit proposé la fonction $Mdx + Ndy$. Je pose

$$Mdx + Ndy = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

d'où $\quad M = \frac{du}{dx} \quad N = \frac{du}{dy}$

Nous aurons

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy} \qquad \frac{dN}{dx} = \frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$$

Mais $\quad \frac{d\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$

Par const. pour que la fonction proposée soit une différentielle exacte il faut que l'on ait

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

C. à. d. que la différentielle du coefficient de dx par rapport à y doit être égale à la différentielle du coefficient de dy par rapport à x.

Si on avait une fonction à 3 variables

$$Mdx + Ndy + Pdz$$

en posant $M = \frac{du}{dx} \quad N = \frac{du}{dy} \quad P = \frac{du}{dz}$ on aurait

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Lorsque la fonction proposée est une différentielle exacte les conditions que nous venons de trouver ont toujours lieu. C'est par le calcul ~~diff~~ intégral qu'on démontre la réciproque c.à.d. que lorsque ces conditions ont lieu la fonction est une différentielle exacte.

Exemples. Soit la fonction

$$x\,ly\,dy + y\,ly\,dx + x\,dy + 2xyz\,dz + yz^2dx + xz^2dy$$

Je la mets sous la forme

$$(y\,ly + yz^2)\,dx + (x\,ly + x + xz^2)\,dy + 2xyz\,dz.$$

Nous aurons

$$\frac{dM}{dy} = ly + 1 + z^2 \quad \frac{dN}{dx} = ly + 1 + z^2 \quad \frac{dM}{dz} = 2zy \quad \frac{dP}{dx} = 2yz.$$

$$\frac{dN}{dz} = 2zx \quad \frac{dP}{dy} = 2xz.$$

Donc la fonction est une différentielle exacte.

Applications du calcul différentiel.

Nous appliquerons d'abord le calcul différentiel à l'évaluation des fractions algébriques qui se réduisent à $\frac{0}{0}$ ou à $\frac{\infty}{\infty}$ lorsqu'on donne aux variables qui les composent certaines valeurs constantes.

Soit $\frac{u}{v}$ une fraction dans laquelle u et v sont fonctions d'x et qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsqu'on pose $x=a$. Je fais $\frac{u}{v}=t$ d'où $u=vt$. Différentiant cette éq. on aura

$$\frac{du}{dx}=v\frac{dt}{dx}+t\frac{dv}{dx},$$

d'où
$$t=\frac{u}{v}=\frac{\frac{du}{dx}-v\frac{dt}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$$

Mais lorsqu'on fait $x=a$ v devient $=0$, ainsi pour $x=a$ on a $\frac{u}{v}=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$. c. à d. que lorsqu'une ~~fraction se réduit à~~

Si je représente $\frac{du}{dx}$ par u' et $\frac{dv}{dx}$ par v' on aura

$$\frac{u}{v}=\frac{u'}{v'}=\frac{\frac{du'}{dx}}{\frac{dv'}{dx}}=\frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\frac{d^2v}{dx^2}}.$$

Dans le cas où $\frac{u'}{v'}$ se réduit encore à ~~∞~~ $\frac{0}{0}$ pour $x=a$. D'après cela si une fraction se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsqu'on donne à x une certaine valeur on cherchera les différentielles des différents ordres du numérateur et du dénominateur jusqu'à ce qu'on obtienne une fraction qui prenne une valeur déterminée. Cette fraction sera égale à la proposée.

On pourrait objecter que dans l'expression

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{du}{dx} - v\frac{dt}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$$

le coefficient $\frac{dt}{dx}$ peut devenir ∞ pour $x = a$ alors $v\frac{dt}{dx}$ ne serait plus zéro.

Nous allons donner une autre démonstration dans laquelle on ne peut plus faire la même objection.

Nous avons $\frac{u}{v} = \frac{f(x)}{F(x)}$ si dans $f(x)$ et $F(x)$ au lieu de remplacer x par a on remplace x par a on aura

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + y(x-a)$$

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + y'(x-a)$$

Mais par hypothèse $f(a)$ et $F(a)$ sont $= 0$ par const.

$$\frac{u}{v} = \frac{f'(a)(x-a) + y(x-a)}{F'(a)(x-a) + y'(x-a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}.$$

Exemples.

Si dans l'expression $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$ on fait $x = 1$ on aura $\frac{0}{0}$ pour trouver la vraie valeur de cette fraction je prends la différentielle du numérateur et celle du dénominateur ce qui donne

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4x}.$$

Cette expression se réduit encore à $\frac{0}{0}$ pour $x = 1$ je prends de nouveau la dérivée d'où

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{6x}{12x^2 - 4} \quad \text{pour } x = 1 \quad \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{6}{12 - 4} = \frac{3}{4}.$$

L'expression $\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ pr $x=\frac{\pi}{2}$

Je prends les différentielles

$$\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{-\cos x}{-2\cos x \sin x} = \frac{1}{2\sin x} \text{ pour } x=\frac{\pi}{2} \text{ on a}.$$

$$\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}.$$

On aurait pu poser

$$\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{1+\sin x} \text{ pr } x=\frac{\pi}{2} \; \frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{2}.$$

Soit l'expression $\frac{a^x-1}{x}$ qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pr $x=0$.

Différentiant on a

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{a^x la}{1} \quad \text{pour } x=0. \quad \frac{a^x-1}{x} = la$$

$\frac{\sin^2 x + 2\cos x - 2}{x^4}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x=0$

$$\frac{\sin x^2 + 2\cos x - 2}{x^4} = \frac{2\sin x\cos x - 2\sin x}{4x^3} =$$

$$\frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos x}{12x^2} = \frac{-4\cos x\sin x + \sin x}{12x} =$$

$$\frac{\cos x + 4\sin^2 x - 4\cos^2 x}{12} \text{ pour } x=0 \text{ on a } -\frac{1}{4}.$$

Soit la fonction $\frac{L(x+1)}{x\sin x}$; pour $x=0$ elle est $\frac{0}{0}$

Mais on a

$$\frac{L(x+1)}{x\sin x} = \frac{\frac{Le}{x+1}}{x\cos x + \sin x} \quad \text{pour } x=0 \text{ on a } \frac{Le}{0} = \infty.$$

Soit uv un produit dans lequel u et v sont des fonctions d'x telles que pour $x=a$ on ait $u=0$ $v=\infty$, le produit uv sera indéterminé, pour déterminer sa vraie valeur je pose $uv = \frac{u}{\frac{1}{v}}$; pour $x=a$ $\frac{1}{v}=0$ et ce produit est de la forme $\frac{0}{0}$; on pourra donc lui appliquer la règle précédente. On pourrait aussi poser $uv = \frac{v}{\frac{1}{u}}$ et pour $x=0$ on aurait $uv = \frac{\infty}{\infty}$; ainsi pour déterminer la valeur de uv il faudrait savoir évaluer les fractions qui se réduisent à $\frac{\infty}{\infty}$

Mr Cauchy a démontré que le théorème que nous avons prouvé pour les fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$ est aussi vrai pour celles qui se réduisent à $\frac{\infty}{\infty}$.

Soit $\frac{u}{v}$ une fonction qui se réduit $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x=a$. Je pose $\frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}}$; pour $x=a$ cette expression se réduira à $\frac{0}{0}$ et on aura par consᵗ:

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}} = \frac{-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}}{-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}} = \frac{u^2\frac{dv}{dx}}{v^2\frac{du}{dx}}$$ ou en tirer

$$\frac{v^2u}{u^2v} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} \qquad \frac{v}{u} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} \text{ d'où } \frac{u}{v} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$$ c.q.f.d

On trouvera donc les valeurs des fonctions qui se réduisent à $\frac{\infty}{\infty}$ cō on a trouvé celles des fonctions qui deviennent $\frac{0}{0}$.

Exemples. Soit

$x^n lx$ pour $x=0$ on a $x^n lx = 0(-\infty)$

Mais cette expression peut se mettre sous la forme $\frac{x^n}{\frac{1}{lx}}$ ~~pr $x=0$~~ on a $\frac{0}{\frac{1}{-\infty}} = \frac{0}{0}$

$$\frac{lx}{x^{-n}} \quad \text{pour } x=0 \text{ ou a } \frac{-\infty}{\infty}$$

Différentiant nous aurons

$$\frac{lx}{x^{-n}} = \frac{\frac{le}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{le}{nx^{-n}} \quad \text{pour } x=0 \text{ ou a } -\frac{le}{\infty}=0$$

L'expression $(x-\frac{\pi}{2})\tan x$, lorsqu'on y fait $x=\frac{\pi}{2}$ devient $0.\infty$. Je la mets sous la forme $\frac{\tan x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$ qui pour $x=a$ devient $\frac{\infty}{\infty}$.

Différentiant ~~on~~ trouve

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^2}} = -\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\cos^2 x} \quad \text{pr } x=\frac{\pi}{2} \text{ ou a } -\frac{0}{0}.$$

Mais $-\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\cos^2 x} = -\frac{2(x-\frac{\pi}{2})}{2\cos x \sin x}$ pr $x=\frac{\pi}{2}$ ou a $-\frac{0}{0}$.

$$-\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x \sin x} = -\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \quad \text{pr } x=\frac{\pi}{2} \text{ ou a } 1.$$

Série de Taylor.

Si de la fonction $y=f(x)$ on pose $\frac{Y-y}{X-x}=P$. d'où $Y=y+P(X-x)$. On aura en différentiant

$$0=\frac{dy}{dx}+\frac{dP}{dx}(X-x)-P.$$

$$0=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2P}{dx^2}(X-x)-2\frac{dP}{dx}.$$

$$0=\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^3P}{dx^3}(X-x)-3\frac{d^2P}{dx^2}.$$

La loi de formation de ces formules est générale car sera a $0=\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{d^nP}{dx^n}(X-x)-n\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}$

ou enfin $0=\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}(X-x)-(n+1)\frac{d^nP}{dx^n}$.

On tire de ces formules

$$P = \frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dx}(X-x)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2}(X-x)$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{1}{3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{3}\frac{d^3P}{dx^3}(X-x)$$

$$\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{1}{n}\frac{d^nP}{dx^n}(X-x).$$

Substituant ces valeurs ds l'éq.

$$Y = y + P(X-x) \qquad \text{on aura}$$

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{dP}{dx}(X-x)^2$$

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X-x)^2}{1.2} + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2}(X-x)^3.$$

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X-x)^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{(X-x)^3}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3P}{dx^3}(X-x)^4.$$

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X-x)^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{(X-x)^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$+ \frac{d^ny}{dx^n}\frac{(X-x)^n}{1.2\ldots n} + \frac{d^nP}{dx^n}\frac{(X-x)^{n+1}}{1.2\ldots n}.$$

Le dernier terme ne peut jamais être infini, car on a

$$\frac{d^nP}{dx^n}(X-x)^{n+1} = 1.2\ldots n\left(Y - y - \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X-x)^2}{1.2} - \cdots\right)$$

expression qui devient 0 pour $Y=y$ et qui ne pourrait être infinie que si Y était ∞.

Proposons nous de trouver les limites entre lesquelles est compris le dernier terme.

Pour cela il faut démontrer que si pour la fonction $u=f(x)$, $\frac{du}{dx}$ conserve touj' le même signe lorsqu'on fait varier x depuis x_0 jusqu'à x_n $\frac{u_n - u_0}{x_n - x_0}$ sera aussi de même signe que les valeurs de $\frac{du}{dx}$, —

En effet je suppose que les intervalles soient égaux et je pose

$x_1 - x_0 = h \quad x_2 - x_1 = h \quad ..$ d'où $x_n - x_0 = nh.$

$$u_1 - u_0 = \frac{du_0}{dx_0}h + \eta_0 h \quad u_2 - u_1 = \frac{du_1}{dx_1}h + \eta_1 h\ ;\ u_n - u_{n-1} = \frac{du_{n-1}}{dx_{n-1}}h + \eta_{n-1}h.$$

$$\text{d'où } u_n - u_0 = \left(\frac{du_0}{dx_0} + \frac{du_1}{dx_1} + \dots + \frac{du_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)h + (\eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_{n-1})h.$$

Or les quantités $u_0\ u_1\ u_2 \dots$ peuvent être rapprochées autant qu'on voudra, par cons^t les quantités $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \dots$ peuvent être négligées et le signe de $\frac{u_n - u_0}{x_n - x_0}$ ne dépend que du signe de $\left(\frac{du_0}{dx_0} + \dots\right)h$

Ce ka..

Maintenant pour trouver les limites je pose

$$u = \left(c - \frac{d^n P}{dx^n}\right)(X - x)^{n+1} \qquad (A)$$

$$\text{d'où } \frac{du}{dx} = -\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}(X-x)^{n+1} - \left(c - \frac{d^n P}{dx^n}\right)(n+1)(X-x)^n.$$

$$\frac{du}{dx} = \left((n+1)\frac{d^n P}{dx^n} - \frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}(X-x) - c(n+1)\right)(X-x)^n.$$

Mais nous avons trouvé

$$(n+1)\frac{d^n P}{dx^n} = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}(X-x)$$

Donc substituant

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - c(n+1)\right)(X-x)^n. \qquad (B)$$

Mais de l'équation (A) on tire

$$u = c(X-x)^{n+1} - 1.2.3\dots n\left(Y - y - \frac{dy}{dx}(X-x)\dots\right)$$

et lorsqu'on remplace x par X ds cette éq. elle se réduit à 0, par cons^t $U = 0$ on a donc

$$\frac{U-u}{X-x} = -\frac{u}{X-x} = \left(\frac{d^n P}{dx^n} - c\right)(X-x)^n.$$

Lorsque la valeur (B) de $\frac{du}{dx}$ sera positive ou négative la valeur de $\frac{U-u}{X-x}$ sera aussi positive ou négative.

Or si on représente par M la < et par N la > valeur de ~~$\frac{d^n P}{dx^n}$~~ $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$; en posant $c = \frac{M}{n+1}$ $\frac{du}{dx}$ sera pos. par cons^t $\frac{U-u}{X-x}$ sera aussi positif et pour que cette dernière condition ait lieu il faudra que

$$\frac{d^n P}{dx^n} > \frac{M}{n+1}$$

si on pose $c = \frac{N}{n+1}$ $\frac{du}{dx}$ sera négatif de $\frac{v-u}{X-x}$ le sera aussi d'où $\frac{d^n P}{dx^n} < \frac{N}{n+1}$.

En général la série de Taylor se met sous la forme:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots + f^n(x)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \begin{cases}\frac{M}{n+1}\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots} \\ \frac{N}{n+1}\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}\end{cases}$$

le dernier terme $+\begin{cases}\frac{M}{n+1}\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n} \\ \frac{N}{n+1}\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}\end{cases}$ représente un signifie que le dernier terme ~~est~~ compris entre $\frac{M}{n+1}\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}$ et $\frac{N}{n+1}\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}$.

Il est à remarquer que ces deux limites sont l'une la plus grande et l'autre la plus petite valeur de l'~~avant~~ dernier terme qui suit $f^n(x)\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ c.à.d. que l'une de ces limites est $f^{n+1}(x)\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ et l'autre est $f^{n+1}(x+h)\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$.

Appliquons cette série à la démonstration de la formule du binome ds le cas où m est quelconque. Pour cela il suffit de poser ~~f~~ $f(x) = x^m$ et on aura

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^3 \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^{m-n}h^n + \begin{cases}\frac{m\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n+1)}x^{m-n-1}h^{n+1} \\ \frac{m\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n+1)}(x+h)^{m-n-1}h^{n+1}\end{cases}$$

Si m est entier et positif la série sera terminée car lorsqu'on aura $n = m$ les limites seront $= 0$ et le terme précédent sera indépendant de x.

Au moyen de la série de Taylor on en trouve une autre qui donne le nombre dont on connait le logarithme.

Pour cela je pose $f(x) = y = a^x$ d'où

~~$\frac{dy}{dx}$~~ $f'(x) = a^x la$ $f''(x) = a^x(la)^2 \ldots$ $f^n(x) = a^x(la)^n$

Substituant ces valeurs dans la série on aura.

$$a^{x+h} = a^x + a^x h\, la + \frac{a^x h^2 la^2}{1.2} + \frac{a^x h^3 la^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$+ \frac{a^x h^n la^n}{1.2.3\cdots n} + \begin{cases} \dfrac{a^x h^{n+1} la^{n+1}}{1.2\cdots(n+1)} \\ \dfrac{a^{x+h} h^{n+1} la^{n+1}}{1.2\cdots(n+1)}. \end{cases}$$

divisant de part et d'autre par a^x

$$a^h = 1 + h\, la + \frac{h^2 la^2}{1.2} + \frac{h^3 la^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{h^n la^n}{1.2\cdots n} + \begin{cases} \dfrac{h^{n+1} la^{n+1}}{1.2\cdots(n+1)} \\ \dfrac{a^h h^{n+1} la^{n+1}}{1.2.3\cdots(n+1)} \end{cases}$$

D'après cette formule si on donne h qui est le log. de a^h on trouvera ce nombre.

On peut poser $a^h = v$ d'où $lv = h\, la$ et la série deviendra

$$v = 1 + lv + \frac{(lv)^2}{1.2} + \frac{(lv)^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{(lv)^n}{1.2\cdots n} + \begin{cases} \dfrac{(lv)^{n+1}}{1.2\cdots(n+1)} \\ \dfrac{v(lv)^{n+1}}{1.2\cdots(n+1)} \end{cases}$$

formule qui donne un nombre dont on connait le log. ds le système népérien.

Si on donnait le Log. d'un nombre pris dans une base quelconque et qu'on demandât ce nombre, on commencerait par calculer le log. népérien de ce nombre et on trouverait ensuite ce nombre au moyen de la formule.

Dans la série de Taylor le dernier terme est compris entre **M** et **N**, ces quantités étant l'une la plus grande et l'autre la plus petite des valeurs qu'on obtient en substituant ds $f^{n+1}(x)$ à la place de x une suite de nombres croissant depuis x jusqu'à $x+h$. Il y a donc une valeur de x qui donne la vraie valeur du dernier terme. On représente cette valeur par $x+\theta h$ θ étant une fraction inconnue. Alors la série s'écrira

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\cdots n} f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2\cdots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h)$$

D'après cela la formule du binome deviendra

$$(x+h)^m = x^m + m x^{m-1} h + \cdots + \frac{m\cdots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^{m-n} h^n + \frac{m\cdots(m-n)}{1.2\cdots(n+1)} (x+\theta h)^{m-n-1} h^{n+1}$$

Divisant les deux membres par x^m on a

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^m = 1 + m\frac{h}{x} + \cdots + \frac{m\cdots(m-n+1)}{1.2\cdots n}\frac{h^n}{x^n} + \frac{m\cdots(m-n)}{1.2\cdots(n+1)}\frac{(x+\theta h)^{m-n-1} h^{n+1}}{x^m}$$

posant $\frac{h}{x} = u$ nous aurons

$$(1+u)^m = 1 + mu + \frac{m(m-1)}{2}u^2 + \cdots + \frac{m\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots n}u^n + \frac{m\cdots(m-n)}{1.2\cdots(n+1)}(1+\theta u)^{m-n-1} u^{n+1}$$

Pour la série qui donne a^{x+h} on aura

$$a^{x+h} = a^x + a^x h la + \frac{a^x h^2 la^2}{1.2} + \frac{a^x h^3 la^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$+ \frac{a^x h^n la^n}{1.2\ldots n} + \frac{a^{x+\theta h} h^{n+1} la^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Divisant par a^x

$$a^h = 1 + h la + \frac{h^2 la^2}{1.2} + \cdots + \frac{h^n la^n}{1.2\ldots n} + \frac{a^{\theta h} h^{n+1} la^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Si on fait $a = e$ on aura

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{1.2} + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} + \frac{e^{\theta h} h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Proposons nous de trouver une série qui donne le Log. d'un nombre quelconque.

Pour cela je pose $f(x) = \mathcal{L}x$ et nous aurons

$$f'(x) = \frac{\mathcal{L}e}{x} = \mathcal{L}e(x^{-1})$$

$$f''(x) = -\mathcal{L}e(x^{-2}) = -\frac{\mathcal{L}e}{x^2}$$

$$f'''(x) = 1.2\,\mathcal{L}e\,x^{-3} = \frac{1.2\,\mathcal{L}e}{x^3}$$

$$f^{IV}(x) = -1.2.3\,\mathcal{L}e\,x^{-4} = -\frac{1.2.3\,\mathcal{L}e}{x^4}$$

$$f^n(x) = \pm 1.2\cdots(n-1)\mathcal{L}e\,x^{-n} = \pm\frac{1.2.3\cdots(n-1)\,\mathcal{L}e}{x^n}$$

Substituant dans la formule de Taylor nous aurons

$$\mathcal{L}(x+h) = \mathcal{L}x + \frac{h\mathcal{L}e}{x} - \frac{h^2\mathcal{L}e}{2x^2} + \frac{h^3\mathcal{L}e}{3x^3} - \cdots$$

$$\pm \frac{h^n\mathcal{L}e}{nx^n} \mp \frac{h^{n+1}\mathcal{L}e}{(n+1)(x+\theta h)^{n+1}}.$$

$$\mathcal{L}\left(1+\frac{h}{x}\right) = \mathcal{L}e\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots \pm \frac{h^n}{nx^n} \mp \frac{h^{n+1}}{(n+1)(x+\theta h)^{n+1}}\right)$$

$$\mathcal{L}(1+u) = \mathcal{L}e\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots \pm \frac{u^n}{n} \mp \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1+\theta u)^{n+1}}\right).$$

Cette série pourrait donner le log. d'un nombre quelconque. Mais elle est très peu convergente et on peut en tirer une autre beaucoup plus convergente. Dans cette série la limite deviendra inutile, ainsi nous allons la négliger. Remplaçons u par une quantité négative plus petite que l'unité on aura

$$\mathcal{L}(1-u) = -\mathcal{L}e\left(u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\dots+\frac{u^n}{n}+\dots\right)$$

Retranchant cette formule de la précédente il vient

$$\mathcal{L}\frac{1+u}{1-u} = 2\mathcal{L}e\left(u+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\dots+\frac{u^n}{n}+\dots\right)$$

$\frac{1+u}{1-u}$ est une quantité plus grande que l'unité, on peut donc poser $\frac{1+u}{1-u} = \frac{m+v}{m}$ d'où $u = \frac{v}{2m+v}$

Substituant

$$\mathcal{L}\frac{m+v}{m} = \mathcal{L}(m+v) - \mathcal{L}m = 2\mathcal{L}e\left(\frac{v}{2m+v}+\frac{v^3}{3(2m+v)^3}+\frac{v^5}{5(2m+v)^5}\dots\right)$$

Si on fait $v = 1$ on aura

$$\mathcal{L}(m+1) = \mathcal{L}m + 2\mathcal{L}e\left(\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3(2m+1)^3}+\frac{1}{5(2m+1)^5}+\dots\right)$$

Pour le système népérien on aurait

$$l(m+1) = lm + \frac{2}{2m+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3(2m+1)^2}+\frac{1}{5(2m+1)^4}+\dots\right)$$

Cette formule est très convergente et comme le dénominateur ne contient que les puissances paires de $2m+1$ les termes sont très faciles à calculer. Faisant $m=1$ dans cette formule on aura $lm = 0$ et on trouvera le log. de 2. Faisant ensuite $m = 2$ on aura le log. de 3 &c. Si on calcule le log. népérien de 10 on trouve $l10 = 2{,}30258509$ ainsi $\frac{1}{2{,}30258509} = 0{,}4342944\overline{8}$

est le module pour passer du système népérien au système décimal. D'après cela pour calculer les log. ds le système décimal on calcule les log. ds le système népérien et on les multiplie par 0,4342944 8.

De la série de Taylor on peut en déduire une autre qui n'en est qu'un cas particulier, mais qui est plus commode pour certaines applications. On la nomme <u>série de Maclaurin</u>. Pour l'obtenir on fait ds la série de Taylor $x=a$ et on remplace X par x ~~on aura~~ ce qui revient à représenter la plus ~~$f(x) = f(a) + f'(a) +$~~ petite valeur de la variable par a et la plus grande par x. On aura.

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n} +$$

$$+ f^{n+1}(a+\theta(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}.$$

Si ds cette série on fait $a=0$ on aura

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + f^n(0)\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n} + f^{n+1}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}.$$

Cette série sert à en trouver deux autres qui ~~sont~~ donnent le sinus et le cos. en fonction de l'arc.

Pour le sinus je pose

$f(x) = \sin x$, d'où $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ $f'''(x) = -\cos x$ $f^{IV}(x) = \sin x$

et par suite

$f(0) = 0$ $\quad f'(0) = 1$ $\quad f''(0) = 0$ $\quad f'''(0) = -1$ $\quad f^{IV}(0) = 0.$

Substituant ds la série on aura

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdots 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdots 7} + \cdots$$

Pour le cos. on pose

$f(x) = \cos x$ d'où $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ $f'''(x) = \sin x$ $f^{V}(x) = \cos x.$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdots 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \cdots$$

Nous avons trouvé

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2\,la^2}{1.2} + \frac{x^3\,la^3}{1.2.3} + \dots$$

Remplaçant a par e nous aurons

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2..4} + \dots$$

Remplaçant x par $x\sqrt{-1}$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2\dots5}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\dots4} - \dots + \sqrt{-1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\dots5} - \dots\right)$$

Ou bien d'après les valeurs de sin x et cos x

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

On aurait de même

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x.$$

Par conséquent

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

De ces deux formules on peut tirer une série qui donne un arc en fonction de la tangente. En effet nous avons

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \times \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}.$$

$$\sqrt{-1}\operatorname{tang} x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}.$$

$$e^{2x\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\operatorname{tang} x + \sqrt{-1}\operatorname{tang} x = e^{2x\sqrt{-1}} - 1.$$

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tang} x}$$

prenant les log. ds le système népérien

$$2x\sqrt{-1} = l\,\frac{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tang} x}$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\frac{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tang} x}.$$

Mais nous avons trouvé la formule

$$l\frac{1+u}{1-u} = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots + \frac{u^n}{n} + \cdots\right)$$

posant $u = \sqrt{-1}\,\text{tang}\,x$ nous aurons

$$x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\sqrt{-1}\,\text{tang}\,x - \frac{\sqrt{-1}\,\text{tang}^3 x}{3} + \frac{\sqrt{-1}\,\text{tang}^5 x}{5} \cdots \pm \frac{(\sqrt{-1})^n\,\text{tang}^n x}{n} + \cdots\right)$$

$$x = \text{tang}\,x - \frac{\text{tang}^3 x}{3} + \frac{\text{tang}^5 x}{5} + \cdots \pm \frac{\text{tang}^n x}{n}$$

Si on pose $\text{tang}\,x = z$ d'où $x = \text{arc tang}.z$ on aura

$$\text{arc tang}\,z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \cdots \pm \frac{z^n}{n} \cdots$$

Au moyen de cette série on peut trouver le rapport de la circonférence au diamètre. En effet on a $\text{tang}\,\frac{\pi}{4} = 1$ par consᵗ posant $z = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Pour mettre cette série sous une forme plus facile à calculer je remarque que deux termes consécutifs quelconques peuvent être représentés par les formules $\frac{1}{2K+1}$ et $\frac{1}{2K-1}$ par consᵗ la différence sera $\frac{2}{(2K+1)(2K-1)}$ ou $\frac{2}{4K^2-1}$ on aura donc

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{36-1} + \cdots\right)$$

$$\pi = 8\left(\frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{36-1} + \cdots\right)$$

On peut trouver une formule plus simple qui donne la valeur de π. Pour cela je représente par y l'arc dont la tangente est $\frac{1}{2}$; arc qu'il est facile d'obtenir. On aura.

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \cdot$$

Mais $\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ par conséquent

$$\frac{\pi}{4} - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \cdots$$

Ajoutant ces deux séries et multipliant la somme par 4 on aura la valeur de π.

Bertrand de Genève a trouvé une série plus convergente que les précédentes qui donne la valeur de π.

Si on fait

$$\text{tang}\, u = \frac{1}{5} \quad \text{on aura}$$

$$\text{tang}\, 2u = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

$$\text{tang}\, 4u = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

$$\text{tang}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

Nous aurons donc

$$u = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \cdots)$$

$$\text{d'où } 4u = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} - \cdots\right)$$

$$4u - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \cdots)$$

Retranchant la 2de série de la 1re et multipliant par 4 on a :

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \cdots\right)$$

Au moyen de la série de Maclaurin on peut obtenir d'autres séries qui donnent un arc en fonction de sa tangente ou de son sinus.

Pour cela je remarque que si on a

$$f'(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c$$

on en tire $f''(x) = 1.B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots$

$$f'''(x) = 1.2.C + 2.3Dx + \dots$$

$$f^{IV}(x) = 1.2.3D + \dots$$

faisant $x = 0$ on aura

$$f'(0) = A \quad f''(0) = 1.B \quad f'''(0) = 1.2.C \quad f^{IV}(0) = 1.2.3.D$$

substituant ds la série de Maclaurin on aura

$$f(x) = f(0) + A\frac{x}{1} + \frac{1.Bx^2}{1.2} + \frac{1.2.Cx^3}{1.2.3} + \frac{1.2.3Dx^4}{1.2.3.4} + \&c$$

$$f(x) = f(0) + \frac{Ax}{1} + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{Dx^4}{4} + \&c \dots$$

Si on pose $f(x) = \text{arc tang } x$ on aura

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + \frac{1.2}{1.2}x^4 - \frac{1.2.3}{1.2.3}x^6 + \dots$$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$f''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots$$

$$f'''(x) = -2 + 3.4x^2 - 5.6x^4 + \dots$$

$$f^{IV}(x) = 2.3.4x - 4.5.6x^3 + \dots$$

$$f^{V}(x) = 2.3.4 - 3.4.5.6x^2 + \dots$$

pour $x = 0$ on aura

$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -2 \quad f^{IV}(0) = 0 \quad f^{V}(0) = 2.3.4.$$

substituant ds la série de Maclaurin on aura

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \&c \dots$$

Si l'on veut trouver un arc en fonction de son sinus, on pose arc sin $x = f(x)$ on aura

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}x^4+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}x^6+\dots$$

ou bien $$f'(x)=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\dots$$

Mais nous avons posé

$$f'(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots$$

On aura donc

$$A=1\quad B=0\quad C=\frac{1}{2}\quad D=0\quad E=\frac{1.3}{2.4}\ \dots$$

et la formule générale

$$f(x)=f(0)+\frac{Ax}{1}+\frac{Bx^2}{2}+\frac{Cx^3}{3}+\frac{Dx^4}{4}+\dots$$

deviendra

$$\text{arc sin } x=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5\,x^7}{2.4.6.7}+\dots$$

Au moyen de cette formule on peut trouver π. Car si l'on pose arc sin $x=\frac{\pi}{6}$ d'où $x=\frac{1}{2}$ on aura

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5.2^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{7.2^7}+\dots$$

Des maxima et minima.

Si dans $y=f(x)$ pour certaines valeurs de x y prend des valeurs plus grandes ou plus petites que les valeurs voisines, ces valeurs de y seront des maxima ou des minima.

Ainsi si $y=f(x)$ représente la courbe ACF AA' CC' EE' seront des maxima et BB' DD' FF' seront des minima.

A
B
C
D' E' F'
A' B' C'
D E F

Au moyen de la série de Taylor, on peut trouver les maxima et minima d'une fonction.

En effet soit a la valeur d'x qui donne pour y un maximum ou un minimum nous aurons

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2} + \cdots$$
$$+ f^n(a)\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} + f^{n+1}(a+\theta(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Mais on peut touj^s prendre $x-a$ assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les autres, c.à.d qu'on peut avoir

$$f^n(a)\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} > f^{n+1}(a+\theta(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

ou $$x-a < \frac{(n+1)f^n(a)}{f^{n+1}(a+\theta(x-a))}.$$

Or pour que la valeur de $x=a$ corresponde à un minimum il faut que

$$f(x)-f(a) = f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2} + \cdots > 0$$

~~Mais~~ On peut donner à $x-a$ une valeur assez petite pour que le signe du 2^d membre ~~terme~~ dépende de celui de $f'(a)\frac{(x-a)}{1}$; mais le signe de ce terme change avec celui de $x-a$. Ainsi à moins que $f'(a)$ ne soit égal à zéro on pourra rendre à volonté le 2^d membre positif ou négatif, mais il doit être touj^s positif. Ainsi pour que $x=a$ donne un minimum Ainsi pour qu'il y ait un minimum il faut que $f'(a)=0$. Pour que $x=a$ donnât un maximum il faudrait que $f(x)-f(a)<0$ d'où on tirerait de même $f'(a)=0$.

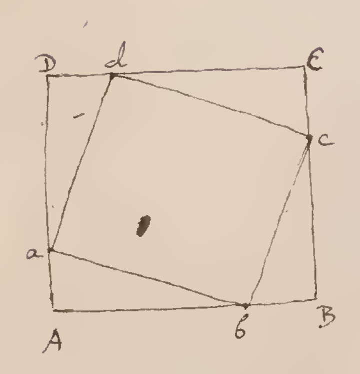
D'après cela on voit que pour que la fonction ait un maximum ou un minimum il faut que la valeur d'x qui donne ce maximum ou ce minimum substituée ds $f'(x)$ la réduise à zéro. Ainsi posant $f'(x) = 0$ et en tirant la valeur d'x on aura la quantité a qu'il faut substituer à x pour avoir un maximum ou un minimum.

Substituant la valeur de x tirée de $f'(x) = 0$ dans $f''(x)$ si on a un résultat positif, $f(x) - f(a)$ sera positif pour une valeur de x-a assez petite, par conséquent $f(a)$ est un minimum. Si le résultat était negatif $f(a)$ serait un maximum.

Si la valeur de x tirée de $f'(x) = 0$ réduisait $f''(x)$ à zéro, il faudrait la substituer dans $f'''(x)$ et le raisonnement serait le même.

En général $f'(x) = 0$ donne plusieurs valeurs pour x alors la fonction a plusieurs maxima ou plusieurs minima, ou bien des maxima et des minima.

Application. Trouver le plus petit carré inscrit ds un carré donné.



Je pose $AB = b$ $Ab = x$ On aura

$$\overline{ab}^2 = x^2 + (b-x)^2 = 2x^2 - 2bx + b^2.$$

$$f(x) = 2x^2 - 2bx + b^2$$

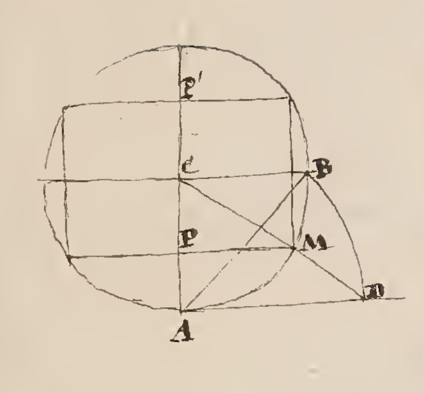
$$f'(x) = 4x - 2b$$

$$f''(x) = 4$$

Je pose $4x - 2b = 0$ d'où $x = \frac{b}{2}$

Substituant ds $f''(x) = 4$ on a un résultat positif

par const. $x = \frac{b}{2}$ donne un minimum. Substituant cette valeur ds $f(x)$ on a $\frac{b^2}{2}$. Ainsi le plus petit carré inscrit à ses angles sur les milieux du carré donné est il est égal à la moitié de ce carré.



Un cercle ~~et~~ un rectangle inscrit tournant autour d'un diamètre parallèle à un des côtés du rectangle, on demande dans quel cas le cylindre engendré sera le plus grand possible.

Je pose $CM = b$ $CP = x$ on aura $\overline{PM}^2 = b^2 - x^2$ par const. le cercle décrit par PM sera $\pi(b^2 - x^2)$ et le volume du cylindre $2\pi(b^2x - x^3)$. Cette expression sera un maximum lorsque le facteur variable sera un maximum. On aura donc $b^2x - x^3$ sera un maximum.

$$f(x) = b^2x - x^3$$
$$f'(x) = b^2 - 3x^2$$
$$f''(x) = -6x$$

Posant $b^2 - 3x^2 = 0$ d'où $x = \frac{\pm b}{\sqrt{3}}$. ~~Il faut faire abstraction du signe ± parce que les valeurs de x portées de C en P ou de C en P' donne le même cylindre.~~ ~~Cette~~ La valeur de $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$ substituée dans $f''(x)$ donne un résultat ~~…~~ négatif par const. le cylindre correspondant à CP est un maximum. (A)

Pour construire CP. On ~~prend~~ décrit un arc de cercle avec AB pour rayon et joignant CD on a le pt. M. En effet puisque $CP = \frac{b}{\sqrt{3}}$ on a $PM = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{3}} = b\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Or nous aurons d'après la construction

$$AD = b\sqrt{2} \quad CD = \sqrt{b^2 + (b\sqrt{2})^2} = b\sqrt{3}$$

Mais

$$PM : CM = AD : CD$$

donc

$$PM = b\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

A) Si on substituait ds $f''(x)$ à la place de ~~x~~ $\frac{b}{\sqrt{3}}$ $-\frac{b}{\sqrt{3}}$ on aurait le même résultat ~~pris en signe~~ contraire. ~~Mais $x = \frac{b}{\sqrt{}}$~~ par const $x = -\frac{b}{\sqrt{3}}$ donne un minimum. Mais pour avoir le résultat de la substitution ~~dans f(x)~~ de $-\frac{b}{\sqrt{3}}$ ds $f(x)$ il faut y substituer $\frac{b}{\sqrt{3}}$ et changer le signe du résultat. Le maximum correspondant à cette valeur est donc nég. c.à.d. que c'est un maximum. Mais les valeurs $\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$ se portant en CP et CP' donnent le même cylindre. Il n'y a donc qu'un maximum.

Partager une ligne donnée b en deux parties telles que le produit de la m^{me} puissance de l'une par la n^{me} puissance de l'autre soit un maximum.

Si les deux parties sont x et $b-x$ on aura

$$f(x) = x^m(b-x)^n$$
$$f'(x) = mx^{m-1}(b-x)^n - nx^m(b-x)^{n-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}(b-x)^n - 2mnx^{m-1}(b-x)^{n-1} + n(n-1)x^m(b-x)^{n-2}$$

Je pose
$$mx^{m-1}(b-x)^n - nx^m(b-x)^{n-1} = 0$$

ou bien $\quad x^{m-1}(b-x)^{n-1}(m(b-x)-nx) = 0$

On peut y satisfaire en posant

$x=0 \quad b-x=0 \quad$ ou $\quad m(b-x)-nx=0$

Les deux 1res éq. ne satisfont pas à la question puisque ds ce cas un des segments serait nul

De la 3me on tire
$$x = \frac{mb}{m+n} \quad \text{d'où} \quad b-x = \frac{nb}{m+n}.$$

Substituant dans $f''(x)$ on trouve, en le mettant d'abord sous la forme
$$f''(x) = x^{m-2}(b-x)^{n-2}\left(m(m-1)(b-x)^2 - 2mnx(b-x) + n(n-1)x^2\right)$$
$$f''(x) = \frac{m^{m-2}\cdot n^{n-2}\, b^{m+n-4}}{(m+n)^{m+n-4}}\left(m(m-1)\frac{n^2b^2}{(m+n)^2} - 2\frac{m^2n^2b^2}{(m+n)^2} + \frac{n(n-1)m^2b^2}{(m+n)^2}\right)$$

Le 1r facteur est tjs positif; pour reconnaître le signe du 2d on le divise par $\dfrac{b^2}{(m+n)^2}$ et il vient $\quad m(m-1)n^2 - 2m^2n^2 + n(n-1)m^2$

ou $\quad m^2n^2 - mn^2 - 2m^2n^2 + m^2n^2 - nm^2$

ou bien $\quad -mn(m+n)$

$f''(x)$ devient négatif lorsqu'on y substitue la valeur d'x tirée de $f'(x)=0$ par cons^t cette valeur donne un maximum. Ainsi pour que le produit des deux segments ~~soie~~ élevés aux puissances m et n soit un maximum il faut que ces segments soient proportionnels à leurs exposants.

Proposons nous de trouver les maxima et minima de la fonction $y=x^x$. Nous aurons

$$f(x)=x^x$$
$$f'(x)=x.x^{x-1}+x^x lx = x^x(1+lx).$$
$$f''(x)=x^x\frac{1}{x}+(1+lx)(x.x^{x-1}+x^x lx)=$$
$$x^{x-1}+x^x(1+lx)^2$$

Je pose $f'(x)=x^x(1+lx)=0$ d'où $lx=-1$

On tire de là $l\frac{1}{x}=1$ par cons^t $\frac{1}{x}=e$ $x=\frac{1}{e}$.

Si on substitue cette valeur de x ds $f''(x)$ on aura un résultat positif par cons^t la courbe n'a qu'un minimum correspondant à $x=\frac{1}{e}$.

Toutes les fois qu'une fonction de x est un maximum ou un minimum pour une certaine valeur d'x, la même valeur donne un maximum ou un minimum pour le log. de la fonction. Ainsi la valeur $x=\frac{1}{e}$ qui donne un minimum pour $f(x)=x^x$ devra aussi donner un minimum pour $f(x)=\mathcal{L}x^x$ et en effet on a

$$f(x)=x.\mathcal{L}x \quad f'(x)=\mathcal{L}x+\mathcal{L}e \quad f''(x)=\frac{\mathcal{L}e}{x}$$
$$\mathcal{L}x+\mathcal{L}e=0 \quad \text{d'où } \mathcal{L}x=\mathcal{L}\frac{1}{e} \quad x=\frac{1}{e}$$

Subst ds $f''(x)$ on a un résultat positif Donc

Soit enfin la fonction $y = \sqrt[x]{x}$ Nous aurons

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} x^{\frac{1}{x}-1} - \frac{x^{\frac{1}{x}} lx}{x^2} = x^{\frac{1}{x}}\left(x^{-2} - \frac{lx}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(-2x^{-3} - \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - lx \cdot 2x}{x^4}\right) + x^{\frac{1}{x}}\left(x^{-2} - \frac{lx}{x^2}\right)^2$$

$$f''(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2lx - 3}{x^3} + \frac{(1-lx)^2}{x^4}\right)^2$$

Egalant $f'(x)$ à zéro on aura

$1 - lx = 0$ d'où $lx = 1$ $x = e$

Substituant dans $f''(x)$

$$e^{\frac{1}{e}}\left(\frac{2-3}{e^3}\right) = -e^{\frac{1}{e}}\frac{1}{e^3} = -e^{\frac{1}{e}-3}.$$

Ainsi la fonction a un maximum qui répond à $x = e$.

Nous avons donné un moyen de déterminer la valeur d'une fraction dont les deux termes sont des fonctions d'x et qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour certaines valeurs de la variable. On peut parvenir au même résultat au moyen de la série de Taylor.

En effet soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ la fraction proposée et $\underline{a}$ une valeur d'x qui la réduit à $\frac{0}{0}$, nous aurons

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots}{F(a) + F'(a)\frac{x-a}{1} + F''(a)\frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + F'''(a)\frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots}$$

Puisque $x = a$ réduit les 2 fonctions à zéro on a $f(a) = 0$ et $F(a) = 0$ on peut supprimer ces termes et diviser haut et bas par $\frac{x-a}{1}$ on aura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a) + f''(a)\,\frac{x-a}{2} + f'''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2\cdot 3} + \dots}{F'(a) + F''(a)\,\frac{x-a}{2} + F'''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2\cdot 3}}$$

Pour $x=a$ cette éq. devient

$$\frac{f(a)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

Si $f'(a)$ et $F'(a)$ sont encore zéro on trouvera de même

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(a) + f'''(a)\,\frac{(x-a)^2}{3} + \dots}{F''(a) + F'''(a)\,\frac{(x-a)^2}{3} + \dots}$$

D'où $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

Ainsi de suite. Nous retrouvons donc les théorèmes que ns avons déjà démontré.

Nous avons démontré que pour une fonction $y = F(x)$, ds laquelle x est une variable indépendante on a pour les dérivées des différents ordres

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} \quad F''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad F'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \dots$$

Si x est $= f(t)$ proposons nous de trouver ces dérivées.

Pour cela je pose

$$F'(x) = p\,, \quad F''(x) = q \quad F'''(x) = r \quad \text{d'où}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \quad q = \frac{dp}{dx} \quad r = \frac{dq}{dx} \quad \text{etc}$$

$$dy = p\,dx \quad dp = q\,dx \quad dq = r\,dx \quad \text{etc}$$

$$d^2y = p\,d^2x + dp\,dx = p\,d^2x + q\,dx^2$$

$$d^3y = p\,d^3x + dp\,d^2x + 2q\,dx\,d^2x + dq\,dx^2 =$$

$$= p\,d^3x + 3q\,dx\,d^2x + r\,dx^3$$

On tire de ces éq.

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$q = \frac{d^2y - p\,d^2x}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

$$r = \frac{d^3y - p\,d^3x - 3q\,dx\,d^2x}{dx^3} = \frac{dx^2 d^3y - dy\,dx\,d^3x - 3d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

$$r = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

Ces formules sont applicables au cas où x est variable indépendante et à celui où x n'est pas variable indépendante. Aussi si on suppose que x est la variable indépendante les expressions d^2x, d^3x &c se réduiront à zéro et les formules deviendront

$$p = F'(x) = \frac{dy}{dx} \quad q = F''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad r = F'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Au moyen de ces formules on peut résoudre deux prob. inverses.

1°. Étant donnée une expression en fonction de $p, q, r \dots$ l'exprimer en dx, dy.

Pour cela il suffit de remplacer $p, q, r \dots$ par leurs valeurs.

2°. Étant donné une expression en fonction de x, y, dx, dy, d^2x, d^2y &c l'exprimer en fonction de $p, q, r \dots$

Pour cela on remplace dy d^2y .. par leurs valeurs en fonction de $p, q \dots dx, d^2x \dots$

Soit proposé pour ex. de transformer

$$\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2y}$$

en fonction de $p, q, r\ldots$ Dans cette expression x n'est pas la variable indépendante et on suppose qu'on ait $dt = \sqrt{dx^2+dy^2}$

L'expression proposée peut se mettre sous la forme

$$\frac{dx^2\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{d^2y} = \frac{dx^2\sqrt{1+p^2}}{pd^2x+qdx^2}. \quad (A)$$

Mais t étant la variable indépendante on a

$$d^2t = dx\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2}\,d^2x = 0$$

Or $\qquad dp = q\,dx.$

Substituant ds l'éq. précédente on en tire

$$d^2x = -\frac{pq\,dx^2}{1+p^2}.$$

Mettant cette valeur ds l'expression (A) la fonction proposée devient

$$\frac{dx^2\sqrt{1+p^2}}{-\frac{p^2q\,dx^2}{1+p^2}+q\,dx^2} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q+p^2q-p^2q} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

On peut déterminer les valeurs de $p, q, r\ldots$ au moyen de la formule de Taylor. En effet substituant ds cette série à la place de $F(x)$, $F'(x)\ldots$ leurs valeurs en fonction de $p, q\ldots$ elle devient

$$Y = y + \frac{p}{1}(X-x) + \frac{q}{1.2}(X-x)^2 + \frac{r}{1.2.3}(X-x)^3 \qquad (A)$$

Mais puisque y est fonction de t on a aussi

$$Y = y + \frac{dy}{dt}dt + \frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dt^2}dt^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dt^3}dt^3 + \cdots (B)$$

x étant aussi fonction de t on a

$$X = x + \frac{dx}{dt}dt + \frac{1}{1.2}\frac{d^2x}{dt^2}dt^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3x}{dt^3}dt^3 + \cdot \quad (C)$$

Egalant la série (B) à la série (A) en remplaçant ds (A) $X-x$ par la valeur tirée de (C) on a

$$y + dy + \frac{1}{1.2}d^2y + \frac{1}{1.2.3}d^3y + \cdots =$$

$$y + p\left(dx + \frac{1}{1.2}d^2x + \frac{1}{1.2.3}d^3x + \cdots\right)$$

$$+ \frac{q}{1.2}\left(d^2x^2 + dx\,d^2x + \cdots\right) + \frac{r}{1.2.3}\left(dx^3 + \cdots\right)$$

Egalant ds cette identité les termes qui doivent multiplier les mêmes puissances de dt on a

$$dy = p\,dx$$
$$d^2y = p\,d^2x + q\,dx^2$$
$$d^3y = p\,d^3x + 3q\,dx\,d^2x + r\,dx^3 \qquad \&c$$

—

Série de Taylor pour une fonction à 3 variables.

Soit $\quad u = f(x, y)$

la fonction proposée. On aura

$$U = f(X, Y)$$

Je pose $\quad u_1 = f(x, Y)$.

Si $Y = y + K$ on aura d'après la serie de Taylor.

$$u_1 = u + \frac{du}{dy}\frac{K}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{K^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\cdot\frac{K^3}{1.2.3} + \cdots$$

Si ds cette expression on remplace x par X, $X = x + h$

$$U = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$+ \frac{K}{1}\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{h}{1} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{K^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^3u}{dx\,dy^2}\frac{h}{1} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{K^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dy^3} + \frac{d^4u}{dx\,dy^3}\frac{h}{1} + \cdots\right)$$

$$v = u + \frac{du}{dx}\cdot\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$
$$+ \frac{du}{dy}\frac{K}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{K}{1}\cdot\frac{h}{1} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{K}{1}\frac{h^2}{1.2} + \dots$$
$$+ \frac{d^2u}{dy^2}\frac{K^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\cdot\frac{K^2}{1.2}\cdot\frac{h}{1} + \dots$$
$$+ \frac{d^3u}{dy^3}\frac{K^3}{1.2.3}.$$

Un terme quelconque peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^g u}{dx^m dy^n}\cdot\frac{h^m}{1.2\dots m}\cdot\frac{K^n}{1.2\dots n}$$

g étant constant pour chaque colonne et toujours égal à ~~m et n~~ la somme des 2 exposants qui varient l'un et l'autre pour chaque terme.

Si on développe $(h+K)^z$ on a

$$(h+K)^z = h^z + z h^{z-1}K + \frac{z(z-1)}{2}h^{z-2}K^2 + \dots$$

~~$$\frac{(h+K)^z}{1.2\dots z} = \frac{h^z}{1.2\dots z} + \frac{h^{z-1}K}{1.2\dots(z-1)} + \frac{h^{z-2}K^2}{1.2\dots(z-2)} + \dots$$~~

$$\frac{(h+K)^z}{1.2\dots z} = \frac{h^z}{1.2\dots z} + \frac{h^{z-1}}{1.2\dots(z-1)}\cdot\frac{K}{1} + \frac{h^{z-2}}{1.2\dots(z-2)}\frac{K^2}{1.2} + \dots$$

Comparant ce développement au terme général on voit que les coefficients d'une colonne quelconque sont égaux au développement du binome. Ainsi si on met la formule sous la forme

$$v = u + \frac{1}{1}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}K\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}h.K + \frac{d^2u}{dy^2}K^2\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}h^3 + \frac{d^3u}{dx^2dy}3h^2.K + \frac{d^3u}{dxdy^2}3h.K^2 + \frac{d^3u}{dy^3}K^3\right)$$

les coefficients des termes compris entre parenthèses seront les mêmes que ceux du binome.

On peut démontrer cette loi d'une autre manière. En effet les coefficients du développement de v

sont les mêmes quelle que soit la fonction. Or si nous prenons

$$y = f(x+y) = f(z)$$

$$\text{d'où } U = f(x+y+h+K) = f(z+h+K)$$

on aura

$$U = \frac{du}{dz}(h+K) + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dz^2}(h+K)^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dz^2}(h+K)^3 + \ldots$$

Dans cette fonction les coefficients des différents termes de 2^x sont les développements des diverses puissances de $h+K$. Donc cette règle est vraie pour une fonction quelconque.(x) (V. P. 96)

Recherche des maxima et minima des fonctions à plus de deux variables.

Soit $u = f(x, y)$

la fonction proposée et $x = a$ $y = b$ deux valeurs qui donnent un maximum ou un minimum.

Nous aurons

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_a(a,b)\frac{x-a}{1} + f''_a(a,b)\frac{(x-a)^2}{1.2} + \text{etc}$$
$$+ f'_b(a,b)\frac{x-b}{1} + f''_{a,b}(a,b)\frac{x-a}{1}.\frac{x-b}{1}$$
$$+ f''_b(a,b)\frac{(x-b)^2}{1.2}$$

Pour que u soit un maximum il faut que

$$f(x,y) - f(a,b) < 0$$

et pour que u soit un minimum il faut que

$$f(x,y) - f(a,b) > 0$$

C. à. d. que l'expression

$$(A)\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dx}\frac{x-a}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \text{etc} \\ \frac{du}{dy}\frac{x-b}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}.\frac{x-a}{1}.\frac{x-b}{1} \\ \qquad + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{(x-b)^2}{1.2} \end{array}\right.$$

soit <0 pour un maximum et >0 pour un minimum. Mais ds le développement de U on peut prendre pour h et k des valeurs assez petites pour que un terme quelconque soit plus grand que le reste de la série. Par const. on peut trouver pour $x-a$ et $x-b$ des valeurs assez petites pour que le signe de (A) change avec celui de la 1re colonne. Mais le signe de cette colonne change avec celui de $x-a$ et de $x-b$ on pourrait donc faire changer à volonté le signe de (A), à moins que $\frac{du}{da}$ et $\frac{du}{dy}$ ne soient égaux à zéro. Mais pour qu'on ait un maximum ou un minimum le signe de (A) doit être constant lorsqu'on donne à $x-a$ et à $x-b$ des valeurs très petites positives ou négatives il faut donc que

$$\frac{du}{dx}=0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dy}=0.$$

Tirant de ces éq. les valeurs de x et de y et les substituant ds les colonnes suivantes de (A) il y aura maximum si le résultat est nég. et minimum s'il est positif.

Pour reconnaître ds quel cas le résultat sera positif et ds quel cas il sera négatif je représente par

$$A \quad B \quad C$$

ce que deviennent

$$\frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2u}{dxdy},\ \frac{d^2u}{dy^2}$$

lorsqu'on y remplace x et y par les valeurs tirées de $\frac{du}{dx}=0$ et de $\frac{du}{dy}=0$. La 2de colonne deviendra

$$A\frac{h^2}{1.2}+B\,h.k+C\frac{K^2}{1.2}$$

Le signe de cette expression ~~est~~ sera le même que

(*) Comme on peut supposer K aussi petit qu'on veut le signe de ce polynome est le même que celui de A. Mais ce polynome est égal à —

(=) On peut faire

$h = -\frac{B}{A}K$

X se réduira alors à

$\frac{K^2(AC-B^2)}{A}$

Pour qu'il soit de même signe que A il faut que

celui de

$$Ah^2 + 2Bhk + CK^2 \quad (x)$$

$$= A\left(h^2 + \frac{2Bhk}{A} + \frac{CK^2}{A}\right) = A\left(h + \frac{B}{A}K\right)^2 + A\left(\frac{CK^2}{A} - \frac{B^2K^2}{A^2}\right)$$

$$= A\left(h + \frac{B}{A}K\right)^2 + \frac{K^2(AC-B^2)}{A}. \quad (=)$$

~~Le 1^r terme conserve son signe quels que soient h et K, pour que l'expression totale ne change pas de signe quels que soient h et k il faut que le 2^d terme soit toujours de même signe que le 1^r~~ c.à.d. de même signe que A. Il faut donc qu'on ait

$$AC > B^2.$$

A et C sont donc de mêmes signes, et la 2de colonne conserve le signe de A. A et C seront positifs pour un minimum et négatifs pour un maximum.

Exemples.

De tous les triangles qui ont même périmètre quel est celui dont la surface est un maximum.

Soit p le demi périmètre donné: x, y, z les trois côtés S la surface on aura

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

Or $\quad 2p = x+y+z \quad$ donc $\quad p - z = x + y - p \quad$ par conséquent

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

pour que S soit un maximum il faut que

$$u = (p-x)(p-y)(x+y-p)$$

soit un maximum. On tire de cette expression

$$\frac{du}{dx} = (p-x)(p-y) - (x+y-p)(p-y) = (p-y)(2p-2x-y)$$

$$\frac{du}{dy} = (p-x)(p-y) - (x+y-p)(p-x) = (p-x)(2p-2y-x)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -2(p-y)$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = -(3p-2x-2y)$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -2(p-x)$$

Je pose

$$\frac{du}{dx} = (p-y)(2p-2x-y) = 0$$

$$\frac{du}{dy} = (p-x)(2p-2y-x) = 0.$$

On peut satisfaire à ces éq. en posant

$$p-y=0 \text{ et } p-x=0 \quad \text{- - - -} (1)$$

$$\text{ou} \quad p-y=0 \text{ et } 2p-2y-x=0 \quad \text{-} \quad (2)$$

$$\text{ou bien } 2p-2x-y=0 \text{ et } p-x=0 \quad \text{- —} \quad (3)$$

$$\text{ou enfin } 2p-2x-y=0 \text{ et } 2p-2y-x=0. \text{ —} \ (4)$$

Les 3 1ers systèmes donnent

$$(1)\begin{cases} y=p \\ x=p \\ z=0 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} y=p \\ x=0 \\ z=p \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x=p \\ y=0 \\ z=p \end{cases}$$

Aucune de ces valeurs ne satisfait à la question puisqu'alors il n'y aurait pas de triangle.

Pour tirer les valeurs d'x et d'y des éq. (4) je retranche la 2de de la 1re, d'où

$$2y-2x+x-y=0 \quad \text{ou} \quad x=y$$

Substituant ds l'une des éq. (4) il vient

$$2p-3x=0 \quad x=\frac{2}{3}p \quad \text{et } y=\frac{2}{3}p.$$

Or $z=2p-x-y$ donc $z=\frac{2}{3}p$. Substituant ces valeurs on trouve

$$A=\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2}{3}p \quad B=\frac{d^2u}{dxdy} = -\frac{1}{3}p \quad C=\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{2}{3}p$$

A et C sont ~~AC-B²~~ de même signes, et nég. il y a donc bien maximum

&c &c

Soit proposé de partager une quantité b en 3 parties x, y, z telles que $x^m \times y^n \times z^p$ soit un maximum.

On aura $z = b-x-y$ et on posera

$u = x^m y^n (b-x-y)^p$ d'où

$$\frac{du}{dx} = m x^{m-1} y^n (b-x-y)^p - p x^m y^n (b-x-y)^{p-1}.$$

$$\frac{du}{dy} = n x^m y^{n-1} (b-x-y)^p - p x^m y^n (b-x-y)^{p-1}.$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = m(m-1) x^{m-2} y^n (b-x-y)^p - 2mp x^{m-1} y^n (b-x-y)^{p-1} + p(p-1) x^m y^n (b-x-y)^{p-2}.$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = mn x^{m-1} y^{n-1} (b-x-y)^p - mp x^{m-1} y^n (b-x-y)^{p-1} - np x^m y^{n-1} (b-x-y)^p + p(p-1) x^m y^n (b-x-y)^{p-2}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = n(n-1) x^m y^{n-2} (b-x-y)^p - 2np x^m y^{n-1} (b-x-y)^{p-1} + p(p-1) x^m y^n (b-x-y)^{p-2}.$$

Il faut poser

$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n (b-x-y)^{p-1} \{m(b-x-y) - px\} = 0$$

$$\frac{du}{dy} = x^m y^{n-1} (b-x-y)^{p-1} \{n(b-x-y) - py\} = 0.$$

La 1re donne

$x=0$, $y=0$, $b-x-y=0$ ou $m(b-x-y) = px$.

La 2de donne

$x=0$, $y=0$, $b-x-y=0$ ou $n(b-x-y) = py$.

Les 3 1res conditions ne sont pas admissibles puisqu'une des parties serait nulle, si une de ces éq. était satisfaite ; on aura donc pour déterminer

les valeurs de x et de y correspondantes à un max. ou à un minimum

$$m(b-x-y) = px \quad n(b-x-y) = py.$$

d'où $\frac{b-x-y}{p} = \frac{x}{m} = \frac{y}{n}$

pour déterminer ces quantités je pose

$\frac{b-x-y}{p} = \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = z$ d'où $x = mz$ $y = nz$ $b-x-y = pz$

Mais puisque la somme des 3 parties est égale à b on a

$$x+y+b-x-y = b \quad \text{substituant}$$

$$mz+nz+pz = b \quad z = \frac{b}{m+n+p} \quad \text{d'où}$$

$$x = \frac{mb}{m+n+p} \quad y = \frac{nb}{m+n+p} \quad b-x-y = \frac{pb}{m+n+p}.$$

On trouve en substituant $AC > B^2$ et $\overline{co}$ A et C sont négatifs ces valeurs correspondent à un maximum

Ainsi pour qu'il y ait un maximum il faut que les trois parties soient proportionnelles à leurs exposants.

Théorème des Fonctions homogènes.

Une fonction est dite homogène lorsque la somme des exposants des variables est constante dans chaque terme,

D'après cela il est évident que si une fonction de $x, y, z \ldots$ est homogène, elle le sera encore lorsqu'on remplacera x par tx, y par ty &c.

t étant une quantité quelconque.

Soit donc $u = f^{(m)}(x, y)$ une fonction homogène du degré m en x et y remplaçant x par tx et y par ty on aura

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Posant $t = 1+g$

$$f(x+gx + y+gy) = (1+g)^m f(x, y) = v.$$

Si on fait $h = gx$, $k = gy$ on aura

$$(1+g)^m f(x,y) = (1+g)^m u = u + mgu + \frac{m(m-1)}{2} g^2 u + \&c -$$

$$= u + \frac{du}{dx}\frac{gx}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{g^2x^2}{1.2} + \&c.$$

$$+ \frac{du}{dy}\frac{gy}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{gx}{1}\cdot\frac{gy}{1}$$

$$+ \frac{d^2u}{dy^2}\frac{g^2y^2}{1\cdot 2}$$

On tire de cette identité

$$\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y = mu.$$

c.à.d. que la somme des produits des différentielles partielles par la variable qui a donné cette différentielle est égale à la fonction multipliée par sa dimension.

On tire de même de cette identité

$$\frac{d^2u}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}xy + \frac{d^2u}{dy^2}y^2 = m(m-1)u.$$

On trouverait des égalités analogues en égalant les coefficients des termes suivants. Mais on peut tirer toutes ces égalités de la 1re. En effet puisque u est une fonction homogène de l'ordre m $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ sont des fonctions homogènes de l'ordre $m-1$.

On aura donc

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dx}x + \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}y = (m-1)\frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d\frac{du}{dy}}{dx}x + \frac{d\frac{du}{dy}}{dy}y = (m-1)\frac{du}{dy}.$$

ou bien

$$\frac{d^2u}{dx^2}x + \frac{d^2u}{dx\,dy}y = (m-1)\frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2u}{dx\,dy}x + \frac{d^2u}{dy^2}y = (m-1)\frac{du}{dy}.$$

Multiplions la 1re éq. par x la 2d par y et ajoutons nous aurons

$$\frac{d^2u}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}xy + \frac{d^2u}{dy^2}y^2 = (m-1)\left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y\right).$$

ou enfin

$$\frac{d^2u}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}xy + \frac{d^2u}{dy^2}y^2 = m(m-1)u.$$

On démontrerait de même les égalités suivantes.

Il serait facile d'étendre ce théorème à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Soit par ex. la fonction

$$u = \frac{x^2 - 2y\sqrt{xy}}{x-y}$$

nous aurons

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x-y)\left(2x - \frac{y^2}{\sqrt{xy}}\right) - (x^2 - 2y\sqrt{xy})}{(x-y)^2} = \frac{x^2 + y\sqrt{xy} - 2xy + \frac{y^3}{\sqrt{xy}}}{(x-y)^2}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{-(x-y)(3\sqrt{xy}) + (x^2 - 2y\sqrt{xy})}{(x-y)^2} = \frac{y\sqrt{xy} - 3x\sqrt{xy} + x^2}{(x-y)^2}.$$

Nous aurons donc

$$\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y = \frac{x^3 + xy\sqrt{xy} - 2x^2y + \frac{xy^3}{\sqrt{xy}} + y^2\sqrt{xy} - 3xy\sqrt{xy} + x^2y}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x^3 - x^2y - (2xy - 2y^2)\sqrt{xy}}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - 2y\sqrt{xy}}{x-y}.$$

Si ds une fraction le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur la dimension de la fraction sera zéro et on devra avoir alors

$$\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y = 0.$$

Lorsqu'une fonction représente une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires, on peut trouver sur la figure quelle est la ligne qui représente la différentielle.

En effet lorsqu'on a $y = f(x)$ on en tire

$$Y - y = f'(x)(X-x) + \eta(X-x).$$

La ligne $M\Sigma$ est égale à $Y-y$; mais si par le point m nous menons une tangente mS cette tangente partage $M\Sigma$ en deux parties. La 1re $S\Sigma$ croît proportionnellement à $m\Sigma$ c.à.d. à $X-x$. ~~Mais si nous prenons un autre point M' nous aurons~~ La 2de MS est nulle pour $X=x$. Or la valeur de $Y-y$ se décompose en deux parties l'une dy qui croît proportionnellement à $X-x$ l'autre $\eta\,dx$ qui est nulle pour $X=x$. ~~Donc~~ De plus la décomposition ne peut se faire que d'une manière. Ainsi $S\Sigma = dy$ $MS = \eta\,dx$.

Proposons-nous d'après cela de trouver les valeurs de la tangente, de la sous-tangente de la normale et de la sous-normale.

D'abord pour déterminer la soustangente pT nous aurons

$$S\Sigma : m\Sigma = pm : pT \quad \text{ou} \quad dy : dx = y : pT$$

$$\text{d'où} \quad pT = \frac{y\,dx}{dy}.$$

De là on tire

$$mT = \sqrt{\overline{mp}^2 + \overline{pT}^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}}$$

ou bien

$$mT = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Pour la sous-normale pN nous aurons

$$pT : pm = pm : pN \text{ ou } \frac{ydx}{dy} : y = y : pN$$

$$\text{d'où } pN = \frac{ydy}{dx}.$$

On aura pour la normale

$$mN = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Appliquons ces formules à quelques courbes.

Soit d'abord un cercle dont l'éq. est

$$x^2+y^2=a^2.$$

Nous aurons en différentiant

$$xdx+ydy=0 \text{ d'où } \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

On aura donc pour la sous-tangente $-\frac{y^2}{x}$.

Pour la tangente $y\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{ay}{x}$.

Pour la ~~sous-tangente~~ sous normale $-x$ et enfin pour la normale $y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = a$. D'où l'on voit que ds le cercle la normale est touj^s égale au rayon.

Prenons pour 2^d ex. l'éq. générale des sections coniques qui est

$$y^2=2mx+nx^2.$$

$$ydy=mdx+nxdx \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{m+nx}{y}.$$

Sous tang.... $\frac{y^2}{m+nx} = \frac{2mx+nx^2}{m+nx}$,

Tang.... $y\sqrt{1+\frac{y^2}{(m+nx)^2}} = \frac{y}{m+nx}\sqrt{(m+nx)^2+y^2}$

Sous-norm.... $m+nx$

Norm.... $y\sqrt{1+\frac{(m+nx)^2}{y^2}} = \sqrt{2mx+nx^2+(m+nx)^2}$

Pour la parabole $n=0$ et la valeur de la sous-tang. devient alors $2x$. C. à d. que ds la parabole la sous-tangente est double de l'abscisse. La sous-norm. devient égale à n c. à. d. que la sous-norm. est égale à la moitié du paramètre.

On appelle logarithmique la courbe représentée par l'éq. $y=a^x$. Pour $x=0$ $y=1$ ainsi la courbe coupe l'axe des y à une distance de l'origine égale à l'unité, lorsque x augmente y augmente très rapidement jusqu'à l'infini, ainsi du côté des x positifs la courbe s'écarte sans cesse de l'axe. Lorsqu'on change x en $-x$ l'éq. devient $y=\frac{1}{a^x}$ et lorsque x augmente y diminue, ~~par~~ const. du côté des x nég. la courbe est asymptote à l'axe.

En différentiant l'éq. on trouve

$$dy=a^x la\,dx \qquad \frac{dy}{dx}=a^x la.$$

On aura pour la sous-tangente

$$\frac{y}{a^x la}=\frac{a^x}{a^x la}=\frac{1}{la}=Le.$$

Ainsi ds la courbe logarithmique la sous-tang. est ~~normale~~ constante.

On appelle courbe des sinus celle dont l'éq. est $y=b\sin\frac{x}{a}$. Prenons le cas le plus simple celui où on a $y=\sin x$. Pour $x=0$ $y=0$ ainsi

la courbe passe par l'origine, l'ordonnée croît jusqu'à ce que x soit égal à $\frac{\pi}{2}$, elle décroît ensuite jusqu'à ce que $x=\pi$ alors $y=0$ &c. Différentiant cette éq. on a

$$dy=\cos x\,dx \qquad \frac{dy}{dx}=\cos x.$$

Sous-tang.... $\frac{y}{\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tang} x.$

Sous norm. $y\cos x=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$

Prenons pour dernier ex. l'éq.

$$y^3+x^3-3axy=0.$$

$$3y^2dy+3x^2dx-3axdy-3aydx=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

Sous-tang. ... $\frac{y^3-axy}{ay-x^2}.$

tang... $y\sqrt{1+\frac{(y^2-ax)^2}{(ay-x^2)^2}}.$

Sous-norm. $\frac{ay^2-yx^2}{y^2-ax}$

norm. $y\sqrt{1+\frac{(ay-x^2)^2}{(y^2-ax)^2}}.$ &c.

On peut trouver au moyen des différentielles l'éq. de la tangente à une courbe quelconque. Soit $f(x,y)=0$ l'éq. de la courbe, l'éq de la tange en un point $x'\,y'$ sera

$$y-y'=a(x-x')$$

a étant la tangente de l'angle que la tangente fait avec l'axe des x, on a

$$a=\frac{dy}{dx}.$$

On aura donc pour l'éq. de la tangente

$$y-y' = \frac{dy}{dx}(x-x')$$

et par suite pour celle de la normale

$$y-y' = -\frac{dx}{dy}(x-x')$$

On peut poser $v = f(x,y) = 0$ d'où

$$\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{dv}{dy}}$$

et par suite l'éq. de la tangente sera

$$\frac{dv}{dy}(y-y') + \frac{dv}{dx}(x-x') = 0.$$

D'après cela il est facile de trouver l'éq. d'une asymptote, il suffit d'exprimer qu'l'une des coordonnées du point de contact est située à une distance infinie.

Soit par ex. l'hyperbole dont l'éq. est

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$

on aura

$$\frac{dv}{dy} = 2a^2y \qquad \frac{dv}{dx} = -2b^2x.$$

L'éq. de la tangente sera donc

$$a^2y'(y-y') - b^2x'(x-x') = 0. \qquad \text{ou bien}$$

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 - a^2yy' + b^2xx' = 0,$$

Mais $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2$ substituant.

$$b^2xx' - a^2yy' - a^2b^2 = 0. \qquad \text{d'où}$$

$$y = \frac{b^2x'}{a^2y'}x - \frac{b^2}{y'}.$$

Pour conclure de cette éq. celle de l'asymptote il faudrait faire x' ou $y' = \infty$. Mais comme ces deux quantités seraient ∞ à la fois on aurait

$y = \frac{\infty}{\infty}$. Pour trouver une valeur déterminée pour y on pose $y' = zx'$. Le point x', y' étant sur l'hyperbole on aura la condition

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2 = 0 \qquad \text{d'où}$$

$$a^2z^2 - b^2 + \frac{a^2b^2}{x'^2} = 0.$$

Pour $x' = \infty$ cette éq. devient

$$a^2z^2 = b^2 \quad \text{d'où} \quad z = \pm \frac{b}{a}.$$

Mais si on pose $y' = zx'$ ds l'éq. de la tang. elle devient

$$y = \frac{b^2}{a^2z}x - \frac{b^2}{y'}$$

Faisant ensuite $y' = \infty$ d'où $z = \pm \frac{b}{a}$ on aura pour les éq. des asymptotes

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Si on prend l'éq. de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes qui est

$$xy = m^2 \qquad \text{on aura}$$

$$\frac{dv}{dx} = y \qquad \frac{dv}{dy} = x.$$

par consᵗ l'éq. de la tangente sera

$$x(y - y') + y(x - x') = 0.$$

$$xy' + yx' - 2m^2 = 0$$

$$y = -\frac{y'}{x'}x + \frac{2m^2}{x'} \qquad (A)$$

Mais $\qquad y' = \frac{m^2}{x'} \qquad$ donc

$$y = -\frac{m^2}{x'^2}x + \frac{2m^2}{x'}$$

Faisant $x' = \infty$ on aura aura $y = 0$ ainsi l'axe des x est une asymptote. Si ds l'éq (A) on

remplacer x' par sa valeur, on aura

$$y = -\frac{y'^2}{m^2}x + 2y' \qquad \text{d'où}$$

$$x = -\frac{m^2}{y'^2}y + \frac{2m^2}{y'}$$

pour $y=\infty$, $x=0$ Ainsi l'axe des y est la 2de asymptote de la courbe.

Soit encore l'éq.

$$U = y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

nous aurons

$$\frac{dU}{dx} = 3x^2 - 3ay \qquad \frac{dU}{dy} = 3y^2 - 3ax.$$

Ainsi l'éq. de la tangente sera

$$(y'^2 - ax')(y-y') + (x'^2 - ay')(x-x') = 0$$

Mais $y'^3 + x'^3 = 3ax'y'$. donc

$$(y'^2-ax')y + (x'^2-ay')x - ax'y' = 0. \qquad \text{d'où}$$

$$y = -\frac{x'^2-ay'}{y'^2-ax'}x + \frac{ax'y'}{y'^2-ax'}$$

Faisant $y' = zx'$ cette éq. devient

$$y = -\frac{x'^2 - azx'}{z^2x'^2 - ax'} + \frac{azx'^2}{z^2x'^2-ax'}$$

$$\text{ou bien} \quad y = -\frac{1-\frac{az}{x'}}{z^2-\frac{a}{x'}}x + \frac{az}{z^2-\frac{a}{x'}}$$

Mais si nous remplaçons y' par zx' ds l'éq. de la courbe elle devient

$$z^3x'^3 + x'^3 - 3azx'^2 = 0.$$

Ou bien en divisant par x'^3

$$z^3+1-\frac{3az}{x'}=0.$$

pour $x'=\infty$ cette éq. donne $z^3=-1$. Nous aurons donc 3 valeurs pour z l'une sera -1 et les autres seront imaginaires. Si on pose ds l'éq. de la tang. $x'=\infty$ $z=-1$ on trouve

$$y=-x-a$$

qui est l'éq. de l'asymptote. Pour construire cette asymptote on fait $y=0$ d'où $x=-a$ et ensuite $x=0$ d'où $y=-a$. Ainsi cette ligne est perpend. à la droite qui partage en deux parties égales l'angle des deux axes.

Des maxima et minima d'abscisses et d'ordonnées.

Lorsqu'un point d'une courbe est un maximum ou un mini, d'ordonnée la tangente à ce point est parallèle à l'axe des x on a donc $\frac{dy}{dx}=0$. Si au contraire un point est un maximum ou un minimum d'abscisse la tang est parallèle à l'axe des y et on a $\frac{dx}{dy}=0$

Prenons encore pour ex. le folium de Descartes dont l'éq. est

$$y^3+x^3-3axy=0$$

Nous aurons

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax} \qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{y^2-ax}{x^2-ay}.$$

Pour avoir les maxima ou minima d'ordonnée il faut poser.

$$x^2 - ay = 0 \quad \text{d'où} \quad y = \frac{x^2}{a}. \ (A)$$

Substituant cette valeur ds la proposée on en tirera les valeurs de x et de y qui donnent un maximum. Or l'éq. précédente représente une parabole. Ainsi le point où l'ordonnée ~~se trouve sur la~~ est un maximum ou un minimum se trouve à l'intersection de la courbe par une parabole. En faisant la substitution on trouve

$$\frac{x^6}{a^2} + x^3 - 3x^3 = 0 \quad \text{ou} \quad x^3(x^3 - 2a^3) = 0.$$

ce qui donne $x = 0$ (*) $x = a\sqrt[3]{2}$.

Si on substituait cette valeur ds l'éq. on aurait en général plusieurs valeurs pour y qui ne correspondraient pas toutes à des maxima. Il faut donc substituer ds l'éq. (A) et on a pour le maximum

$$x = a\sqrt[3]{2} \qquad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Pour les maxima et minima d'abscisses il faut poser $y^2 - ax = 0$ d'où $x = \frac{y^2}{a}$. (A')

Substituant ds l'éq. proposée elle devient

$$y^3 + \frac{y^6}{a^3} - 3y^3 = 0 \qquad y^3(y^3 - 2a^3) = 0$$

$$y = 0 \qquad y = a\sqrt[3]{2}.$$

La 1re valeur substituée ds l'éq (A') donne $x = 0$. Ainsi la courbe a un minimum d'abscisse à l'origine c.à.d. qu'elle est tangente à l'axe

~~dy~~ des y. La 2de valeur substituée ds l'éq. (A) donne
$x = a\sqrt[3]{4}$. Ainsi les coordonnés du pt maximum
d'abscisse sont

$$y = a\sqrt[3]{2} \qquad x = a\sqrt[3]{4}.$$

(*) La valeur $x=0$ substituée ds l'éq. (A*) donne $y=0$
il y a donc un minimum d'ordonnée à l'origine. c.à.d
que la courbe est tangente à l'axe des x à l'origine.

(x) Dans le développement d'une fonction à deux variables on peut touj. trouver pour h et K des valeurs assez petites pour que une colonne quelconque soit plus grande (abstraction faite du signe) que la somme de toutes les suivantes.

En effet h et K étant deux quantités arbitraires on peut toujours prendre $h = mK$

alors la 1re colonne deviendra

$$K\left(\frac{du}{dx}m + \frac{du}{dy}\right)$$

La 2de sera

$$K^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}m^2 + \frac{d^2u}{dxdy}m + \frac{d^2u}{dy^2}\right)$$

Ainsi de suite.

Les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ ... sont indépendantes de K on peut donc représenter par des constantes les coefficients des diverses puissances de K et les termes qui suivent u dans le développement de U seront

$$AK + BK^2 + CK^3 + DK^4 + \ldots$$

Dans cette série on peut touj. donner à K une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. Ic nc

Proposons nous de reconnaître si une courbe tourne sa concavité ou la convexité vers l'axe des x.

Si sur une courbe rapportée à des axes quelconques on prend deux points M m_1 et qu'on les joigne par une droite que par le milieu de cette corde ~~d par~~ on mène l'ordonnée po, la courbe sera dite convexe vers l'axe des x si $po > pm$ et concave si $po < pm$. D'après cela $y=f(x)$ étant l'éq. de la courbe et h la distance $pP = pP_1$ on aura

$$MP = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \cdots \text{ (en posant } Ap = x)$$

$$m_1P_1 = y - \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \cdots$$

D'où

$$po = \frac{MP + m_1P_1}{2} = y + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Mais on peut toujᵗ trouver pour h une valeur assez petite pour rendre le 2ᵈ terme plus grand que la somme de tous les autres pour cela il suffira de poser

$$f^{IV}(x+\theta h)\frac{h^4}{1.2.3.4} < f''(x)\frac{h^2}{1.2}$$

Or le signe du 2ᵈ terme reste le même lorsque celui de h change par consᵗ le signe de toute la série à partir du 2ᵈ terme sera le même que le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$; pour que la courbe soit convexe au point m il faut que mp soit plus petit que po et pour qu'elle soit concave il faut que $pm > po$ Donc la courbe sera concave lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera nég. et elle sera convexe lors que $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera positif.

Prenons pour ex. la courbe

$$y^3+x^3-3axy=0.$$

nous aurons en différentiant

$$(3y^2-3ax)dy+(3x^2-3ay)dx=0$$

$$(y^2-ax)\frac{dy}{dx}+x^2-ay=0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}$$

Différentiant de nouveau

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(2y\frac{dy}{dx}-a\right)+2x-a\frac{dy}{dx}=0$$

Réduisant et substituant à la place de $\frac{dy}{dx}$ sa valeur il vient

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\frac{(x^2-ay)^2}{(y^2-ax)^2}+2a\frac{x^2-ay}{y^2-ax}+2x=0.$$

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2(yx^4-2ay^2x^2+a^2y^3+ax^2y^2-a^2y^3-a^2x^3+a^3xy+x(y^2-ax)^2}{(y^2-ax)^2}$$

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{xy(x^3+y^3-3axy)+a^2(y^3+x^3)-a^2(y^3+x^3)+a^3xy}{(y^2-ax)^2}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\frac{a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

Lorsque x et y sont positifs ~~par cont~~ la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négative ~~positive~~ (c. à d. que la courbe est convexe) ~~basse~~ pour $y^2>ax$, elle est au contraire concave pour $y^2<ax$. Pour le point qui sépare la partie convexe de la partie concave on a

$$y^2=x \quad x=\frac{y^2}{a} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{y^6}{a^3}+y^3-3y^3=0 \qquad y^3(y^3-2a^3)=0$$

$y=0$ et $y=a\sqrt[3]{2}$ substituant dans $y^2=x$

$x=0$ et $x=a\sqrt[3]{4}.$

Si on prend l'éq. des sections coniques

$$y^2 = mx + nx^2$$

On aura

$$2y\frac{dy}{dx} = m + 2nx \quad \text{ou} \quad y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}m + nx$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\frac{1}{4}m^2 + mnx + n^2x^2}{y^2} = n$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\frac{1}{4}m^2 + ny^2}{y^2} = n$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ny^2 - \frac{1}{4}m^2 - ny^2}{y^3} = -\frac{\frac{1}{4}m^2}{y^3} \quad \text{\&c \&c —}$$

Pour l'éq. de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes qui est

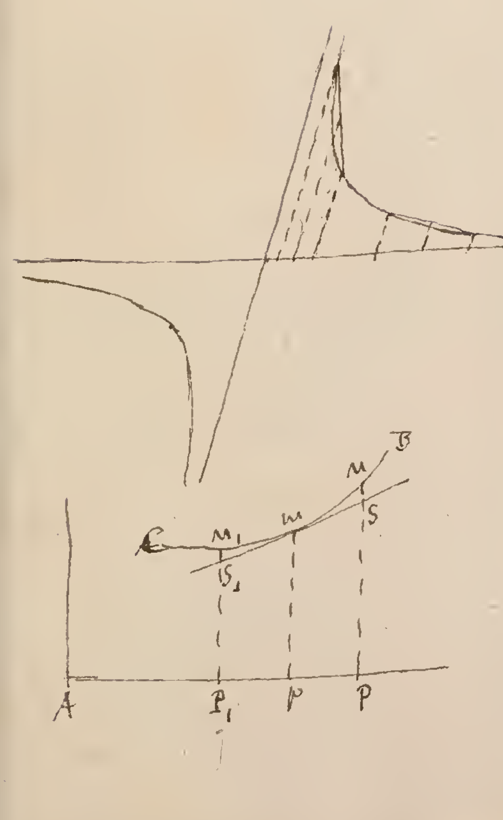
$$xy = m^2 \quad \text{on aura}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \quad x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$$

Ainsi lorsque ~~x est positif~~ y est ~~aussi~~ positif ~~et~~ la courbe est convexe. Lorsque ~~x est nég. y est~~ y est négatif ~~et alors~~ $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nég. donc la courbe est concave.



Cherchons les points d'inflexion ds une courbe quelconque.

Soit CmB cette courbe. Au point m je mène une tangente si SM et S_1M_1 sont de même signe il n'y aura pas d'inflexion en m. Si MS et M_1S_1 sont de signes contraires il y aura une inflexion en m

Posons $Ap = x$ $AP = X$ $pP = h$ on aura

$$PM = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

L'éq. de la tangente au point m est

$$(u-y) = \frac{dy}{dx}(t-x)$$

d'où $PS = y + \frac{dy}{dx}h$. par const.

$$SM = PM - PS = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Pour que m soit un point d'inflexion il faut que SM change de signe avec h, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, puisqu'on peut trouver pour h une valeur qui rend le 1er terme plus grand que la somme de tous les autres.

Donc pour trouver les pts d'inflexion d'une courbe il faut chercher la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et l'égaler à zéro. On a ainsi une éq. qui combinée avec l'éq. de la courbe donne les pts d'inflexion.

Une droite indéfinie tourne au tour d'un pt fixe C pris sur l'axe des y, à partir du point D où elle coupe l'axe des x on porte une longueur constante Dm, Dm' de part et d'autre de cet axe on demande la courbe qui est le lieu géométrique des pts m m'.

Je pose $CA = b$ $Dm = a$ $Ap = x$ $Pm = y$

Les triangles semblables CQm PmD donnent

$$Pm : Dm = CQ : Cm$$

ou bien $y : a = b - y : Cm$ $Cm = \frac{a(b-y)}{y}$

mais $\overline{Cm}^2 = \overline{Qm}^2 + \overline{CQ}^2$ donc

$$\frac{a^2}{y^2}(b-y)^2 = x^2 + (b-y)^2$$

Réduisant on aura pour l'éq. de la courbe

$$x^2 = \left(\frac{a^2}{y^2} - 1\right)(b-y)^2.$$

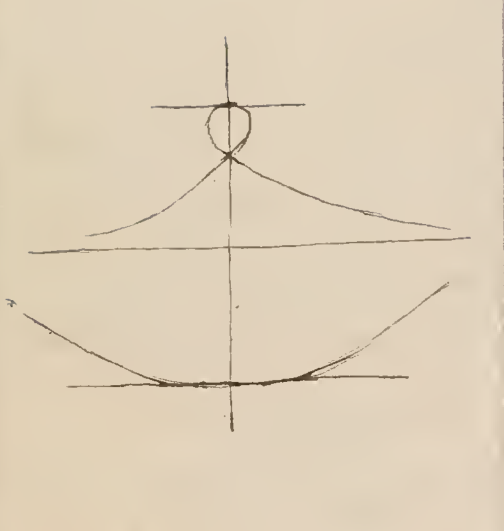
Pour trouver les maxima et minima je cherche la valeur de $\frac{dy}{dx}$. Pour cela je différencie ce qui donne

$$2x\,dx = -\left(2\left(\frac{a^2}{y^2}-1\right)(b-y) + (b-y)^2 \cdot 2a^2 y^{-3}\right)dy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{(b-y)\left(\frac{a^2}{y^2}-1\right) + \frac{a^2(b-y)^2}{y^3}}.$$

Mettant à la place de x sa valeur

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{\sqrt{\frac{a^2}{y^2}-1}}{\frac{a^2 b}{y^3} - 1} = \mp \frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2 b - y^3}.$$



Pour que le pt x et y soit un maximum d'ordonnée il faut qu'on ait $\frac{dy}{dx} = 0$ d'où $y = \pm a$ et $x = 0$. Lorsque on a ds l'éq. $a = b$ le dénominateur devient 0 pour $y = a$, alors $\frac{dy}{dx}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ mais on peut poser alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2\sqrt{a-y}\,\sqrt{a+y}}{a^3 - y^3} = \frac{y^2\sqrt{a+y}}{\sqrt{a-y}\,(a^2 + ay + y^2)}$$

pour $y = a$ le numér. est fini et le dénom. est zéro par cons.t ds ce cas il n'y a pas de maximum d'ordonnée. Pour $y = -a$ le dénom. est fini et le numérateur est zéro, par cons.t le point $y = -a, x = 0$ est un maximum négatif d'ordonnée.

Pour avoir un maximum ou un minimum d'abscisse il faudra égaler à zéro la valeur

$$\frac{dx}{dy} = \mp \frac{a^2 b - y^3}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}.$$

ce qui donne $y = \sqrt[3]{a^2 b}$. Lorsque $a = b$ ~~cette valeur~~

cette valeur se réduit à $y=a$ d'où $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}$. Mais en supprimant le facteur commun on a

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{a-y}\,(a^2+2ay+y^2)}{y^2\sqrt{a+y}}$$

pour $y=a$ cette expression se réduit à zéro, par const. il y a un maximum d'abscisse correspondant à $y=a$, $x=0$.

Si a est plus petit que b $y=\sqrt[3]{a^2b}$ sera $>a$ par const. le dénominateur de $\frac{dx}{dy}$ sera imaginaire c. à. d. que ds ce cas il n'y a pas de maximum d'abscisse.

Des points singuliers.

On appelle point singulier ds une courbe quelconque un point doué de certaines propriétés qui ne varient pas lorsqu'on change les axes. Les points singuliers sont les points d'inflexion les points conjugués, les points multiples, des points de rebroussement, les points anguleux. et les points d'arrêt.

Nous nous sommes déjà occupés des points d'inflexion et des points conjugués. Cherchons à déterminer les points multiples.

Soit $V=0$ une équation rationnelle en x et y. si plusieurs branches de cette courbe passent en un même point m, il devra y avoir plusieurs tangentes au même point. Mais en représentant par x et y les coordonnées du point de tangence de l'angle que la touchante à ce point ~~fait~~ avec l'axe des x sera

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{dv}{dy}}.$$

Pour un point multiple il faut que $\frac{dy}{dx}$ ait plusieurs valeurs, et ~~co~~ $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$ ne contiennent pas de radicaux $\frac{dy}{dx}$ doit se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$ c.à.d. que pour un point multiple on a $\frac{dv}{dx}=0$ $\frac{dv}{dy}=0$.

Mais la réciproque n'est pas vraie, c.à.d. que toutes les fois que $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$ sont zéro pour certaines valeurs de x et de y on ne peut pas en conclure que ce point est un point multiple.

Pour le faire voir par un exemple prenons l'éq.

$$y^m - (x-1)^m . x = 0$$

ds laquelle m est un nombre entier pair ou impair.

En différentiant cette éq. il vient

$$m y^{m-1} dy - m(x-1)^{m-1} . x dx - (x-1)^m . dx = 0$$

d'où $$\frac{dy}{dx} = \frac{m(x-1)^{m-1} . x + (x-1)^m}{m y^{m-1}}.$$

valeur qui devient $\frac{0}{0}$ au point de la courbe dont les coord. sont $x=1$, $y=0$. Or ce point est double ou simple selon que m est pair ou impair; car ds le 2d cas, la courbe n'a qu'une seule branche et par const. aucun point multiple; et ds le 1r cas elle a deux branches qui viennent se couper au point en question. On peut donc énoncer ainsi la règle.

Etant donnée une éq. délivrée de radicaux, $V=0$, on posera $\frac{dv}{dx}=0$, $\frac{dv}{dy}=0$ d'où on tirera les valeurs réelles de x et de y. Substituant ces valeurs dans l'éq. $V=0$ et ne conservant que celles qui satisfont à cette éq. on sera sûr d'avoir les coordonnées de tous

les points de la courbe qui peuvent être des points multiples. On reconnaîtra ensuite si chacun de ces points est effectivement multiple en discutant le cours de la courbe.

L'expression $\frac{dy}{dx}$ se réduisant à $\frac{0}{0}$ pour certaines valeurs d'x et d'y pour avoir sa valeur on différencie l'~~expression~~ équation une 2de fois alors on a une éq. qui contient $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ et qui donne par const. deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ Si en substituant dans ces valeurs les quantités qu'on a obtenues en posant $\frac{dv}{dx}=0$ $\frac{dv}{dy}=0$ on trouve encore $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, il faudra différentier une 3e fois et on aura 3 valeurs pour $\frac{dy}{dx}$.

Prenons pour exemple l'éq. de la conchoïde

$$v=\left(\frac{a^2}{y^2}-1\right)(b-y)^2-x^2=0.$$

$$\frac{dv}{dx}=-2x$$

$$\frac{dv}{dy}=-2\left(\frac{a^2}{y^2}-1\right)(b-y)+(b-y)^2\left(-2a^2y^{-3}\right)$$

$$\frac{dv}{dy}=-2(b-y)\left(a^2y^{-3}(b-y)+\frac{a^2}{y^2}-1\right)$$

$$\frac{dv}{dy}=-2(b-y)\left(\frac{a^2b}{y^3}-1\right)$$

Posant $\frac{dv}{dx}=0$ et $\frac{dv}{dy}=0$ on en tire $x=0$ et $y=b$ ou bien $x=0$ et $y=\sqrt[3]{a^2b}$. Les 1res valeurs satisfont à l'équation, car elles la réduisent à $0=0$. Substituant les 2des $x=0$, $y=\sqrt[3]{a^2b}$, on trouve

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^4b^2}}-1\right)\left(b-\sqrt[3]{a^2b}\right)^2=0$$

ou bien $\left(a^2-a\sqrt[3]{ab^2}\right)\left(b-\sqrt[3]{a^2b}\right)^2=0.$

Pour que cette condition fût satisfaite il faudrait qu'on eût $a=\sqrt[3]{ab^2}$ ou $b=\sqrt[3]{a^2b}$. De ces deux

conditions on tire également $a = \pm b$. Par cons[équent]
lorsque a est différent de b ds l'éq. si la courbe
a un point multiple ses coord. sont $x=0$, $y=b$.
Lorsque $a=b$ ds l'éq. si ~~elle~~ la courbe a des points
multiples leurs coord. sont $x=0, y=b$ et $x=0, y=\sqrt[3]{a^2b}$

Pour avoir les tang. trigon. des angles que les
touchantes font avec les axes des x on différentie
l'éq. ce qui donne

$$x\,dx + (b-y)\left(\frac{a^2b}{y^3}-1\right)dy = 0$$

Différentiant de nouveau

$$1 + (b-y)\left(\frac{a^2b}{y^3}-1\right)\frac{d^2y}{dx^2} + (b-y)\left(-3a^2by^{-4}\right)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{a^2b}{y^3}-1\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Pour $x=0$ $y=b$ cette expression se réduit à

$$\left(\frac{a^2b}{y^3}-1\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{a^2b}{y^3}-1}}$$

Faisant $y=b$ ds cette expression on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Lorsque dans l'éq. $a=b$, les points multiples,
s'il y en a, ~~auraient~~ ont pour coordonnées $x=0, y=b$
et $x=0$ $y=\sqrt[3]{a^2b}$, mais la discussion de la
courbe prouve qu'il n'y en a pas dans ce
cas là. Il n'y a pas non plus de points mul-
tiples lorsque $a<b$.

Il y a une autre méthode pour déterminer les
points multiples qui sert ~~en même temps à trouver les~~
~~pts de rebroussement.~~

Si une courbe a un point multiple ~~ou de~~
~~rebroussement~~ correspondant à $x=a$, $y=b$,
il faut que pour une même valeur d'x on ait

deux valeurs d'y qui se réduisent à une seule lorsque on fait $x=a$. Ainsi si la valeur d'y exprimée en fonction d'x contient un radical de degré pair multiplié par un facteur qui se réduit à zéro pour $x=a$*. Ainsi résolvant l'éq. par rapport à y et égalant à zéro le facteur qui multiplie le radical on aura la valeur d'x qui correspond à un point multiple.

*s'il y a un point multiple correspondant à $x=a$

Passons maintenant aux points de rebroussement.

Soit $y=f(x)$ l'éq. d'une courbe, a et A les coordonnées du point m : L'ordonnée qui répond ~~au pt m~~ à l'abscisse $x=a+h$ c.à.d. la fonction $f(a+h)$ pourra toujs être développée en une série de cette forme

$$A+Bh^{\alpha}+Ch^{\beta}+Dh^{\gamma}+\dots$$

α, β, γ.. étant une suite d'exposants positifs et croissants, et le 1r terme du développement étant l'ordonnée du point m.

Si l'exposant α est plus petit que un, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ sera infinie pour $x=a$, par consᵗ la tangente à la courbe au pt m sera perpend. à l'axe des abscisses. Si au contraire cet exposant est plus grand que un la valeur de $\frac{dy}{dx}$ sera nulle au point m et la tangente à la courbe y sera parallèle à l'axe des abscisses. En supposant donc que l'on ait déterminé d'avance les pts de la courbe où la tangente est perpend. ou parallèle à l'axe des abscisses et qu'il ne s'agisse plus maintenant que des points où la tangente est inclinée sur

ce même axe on aura $\alpha = 1$ et

$$f(a+h) = A + Bh + Ch^{\beta} + Dh^{\gamma} + Eh^{\delta} + \text{---}$$

Cela posé en prenant pour h une très petite quantité positive ou négative, cette série sera convergente et elle donnera la valeur de $f(a+h)$ ou celle de $f(a-h)$. Or il se présente deux cas à examiner, celui où aucun des exposants $\beta, \gamma, \delta \ldots$ n'est une fraction de dénominateur pair, et celui où il se trouve de pareilles fractions parmi ces exposants.

Di le 1^r cas les valeurs de $f(a+h)$ et $f(a-h)$ seront toutes deux réelles, et par cons.^t la courbe aura des p.^ts de part et d'autre du point m. Si β est une fraction de dénominateur pair, elle ne présentera rien de particulier à ce p.^t Si le dénominateur de β est impair, la courbe aura une inflexion au p.^t m. En effet concevons une tangente à la courbe en ce point, la différence entre les ordonnées de cette tangente et celle de la courbe qui répondent à l'abscisse $x = a + h$ sera exprimée par la série,

$$Ch^{\beta} + Dh^{\gamma} + Eh^{\delta} + \&c.$$

On pourra toujours prendre pour h une quantité positive ou négative, assez petite pour que le signe du 1^r terme Ch^{β} décide du signe de la série entière. Or ce 1^r terme changera de signe avec h quand β sera un nombre impair ou une fraction de numérateur impair; et il restera de même signe, lorsque cet exposant sera un nombre pair ou une fraction de numérateur pair. Donc 1°. la tangente coupera la courbe au p.^t m et par cons.^t la courbe sera infléchie à ce point, d.^s le cas de β impair. 2°. La tangente sera ou

dessus ou au dessous de la courbe de part et d'autre du point m, ds le cas de 6 pair et alors ce point ne présentera rien de remarquable.

Toutes les fois que l'exposant 6 est différent du nombre 2 la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nulle ou infinie pour $x=a$, nulle si 6 surpasse 2 et infinie si 6 est plus petit que 2. Puis donc qu'aux pts d'inflexion 6 est un nombre impair ou une fraction ~~il en~~ ~~résulte qu'en ces pts~~, il en résulte qu'en ces pts la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nécessairement égale à 0 ou ∞. Si donc on tire de l'éq. de la courbe la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sous la forme d'une fraction $\frac{M}{N}$ il faudra faire successivement $M=0$ et $N=0$ et en combinant ces éq. avec celles de la courbe, on déterminera les coord. de tous les pts de cette courbe qui peuvent être des pts d'inflexion.

Examinons maintenant le cas où parmi les exposans $6, \gamma, \delta$.. il y a des ~~dénominateurs~~, pairs.

Il est évident que ds ce cas la valeur de l'une des fonctions $f(a+h)$ et $f(a-h)$ sera réelle et l'autre imaginaire. La courbe a donc des pts d'un côté du point m et n'en a pas du côté opposé; par const. ce point est un point de rebroussement ou une simple limite de la courbe ds le sens des abscisses. Mais en un point de cette dernière espèce la tangente à la courbe est perpend. à l'axe des x, ce qui serait contre la supposition que ns avons faite. Le point m est donc un point de rebroussement.

Réciproquement lorsqu'une courbe doit avoir un rebroussement au p^t m, l'ordonnée doit avoir une seule valeur pour $x=a$. deux valeurs distinctes pour $x=a+h$ et être imaginaire pour $x=a-h$. Il faudra donc que l'éq. de la courbe résolue par rapport à l'ordonnée renferme un radical pair de $x-a$, qui deviendra nul pour $x=a$, qui aura deux valeurs pour $x=a+h$ et qui sera imaginaire pour $x=a-h$. Par cons^t le développement ci dessus de $f(a+h)$ contiendra un radical pair de h et voilà ce qui introduit des fractions de dénominateurs pairs parmi les exposants α, β, γ..

En prenant ds ce développement le radical pair de h qu'il renferme avec le signe $\pm$ on aura les valeurs de l'ordonnée qui répondent aux deux branches de courbe réunies au point m. Ces valeurs développées suivant les puissances de h auront donc au moins les deux termes $A+Bh$ communs en sorte que les deux branches auxquelles ces valeurs appartiennent auront même tangente au point m. On peut donc dire que quand deux branches d'une même courbe se rencontrent en un point pour y former un rebroussement, ces deux branches ont en ce point une tangente commune. D'après cela on partage les p^ts de rebroussement en deux espèces Ceux où la tangente passe entre les deux branches de la courbe et ceux où la tangente laisse les deux branches d'un même côté.

Pour reconnaitre l'espèce d'un p^t de rebroussement il suffit de considérer l'exposant β. Si cet exposant est

une fraction de dénom. pair, le pt est de la 1re espèce. Si le contraire a lieu le pt est de la 2de espèce. Pour le prouver concevons au point m la tangente commune aux deux branches, et considérons ces différences entre les ordonnées qui répondent à l'abscisse $x=a+h$, d'abord entre l'ordonnée de la tangente et celle de l'une des deux branches, puis entre l'ordonnée de la tangente et celle de l'autre branche. Ces différences développées suivant les puissances de h, auront toutes deux le même 1r terme, quand b ne sera pas une fraction de dénominateur pair, tandis que le 1r terme de l'une sera égal et de signe contraire au 1r terme de l'autre quand b sera une fraction de dénominateur pair. Or on peut touj.s prendre la valeur de h assez petite pour que le signe du 1r terme décide du signe de la différence entière; donc la tangente au point m passera entre les deux branches réunies en ce point quand b sera une fraction de dénom. pair; et ds le cas contraire elle passera au-dessus ou au-dessous des deux branches.

Il est visible maintenant qu'aux points de rebroussement de la 1re espèce, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est touj.s nulle ou infinie puisqu'en ces pts l'exposant b est touj.s fractionnaire. Les pts de rebroussement de la 1re espèce qu'une courbe peut avoir seront donc déterminés en même tems que les pts d'inflexion. Quant aux rebroussements de la 2de espèce le calcul diff. ne peut donner aucune règle pour les trouver directement car le rang du terme qui doit contenir une puissance

fractionnaire de h n'étant pas déterminé, on ne peut pas dire quel est le 1r coefficient différentiel de l'ordonnée qui doit devenir infini. Au reste les points de la 1re et de la 2de espèce peuvent être considérés ꝏ des pts multiples et ꝏ tels ils seront déterminés par la règle énoncée plus haut.

Proposons nous de trouver les valeurs de la ~~sous~~ soustangentes de la tangente de la sousnormale de la normale pour les courbes rapportées aux coordonnées polaires

Soit A le pole Ax la droite fixe, u le rayon vecteur et t l'arc de cercle, $u = f(t)$ l'éq. de la courbe; si par le pt A j'élève AT perpend. sur le rayon vecteur AM, AT sera la sous tang. MT la tangente, AR la sousnormale et MR la normale. Pour déterminer la soustangente je prends un très petit arc Mm je joins Am et par le pt M je mène Mp parallèle à AT. Ns aurons

$$pr : Mp = MA : AT.$$

Pour déterminer Mp du pt A ꝏ centre avec un rayon égal à 1 je décris une circonf. La ligne Mp étant très petite pourra être considérée comme un arc décrit du pt A ꝏ centre avec AM pour rayon. on aura donc

$$Mp = \frac{MA \cdot Nn}{1} = u\,dt.$$

Substituant ds la 1re proportion on aura.

$$du : u\,dt = u : AT = \frac{u^2 dt}{du}$$

D'après cela on aura pour la tangente

$$M\mathcal{T} = \sqrt{u^2 + \frac{u^4 dt^2}{du^2}} = u\sqrt{1 + u^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2}$$

Pour la sous normale, le triangle rectangle $MR\mathcal{T}$ donne.

$$A\mathcal{T} : AM = AM : AR.$$

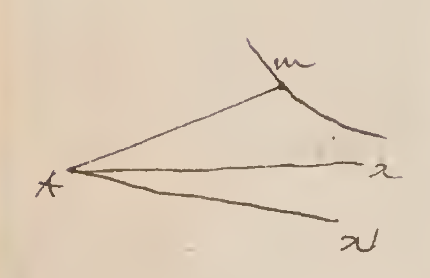
$$\frac{u^2 dt}{du} : u = u : AR \quad \text{d'où } AR = \frac{du}{dt}$$

Par suite on aura pour la normale

$$MR = \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2}.$$

Appliquons ces formules à quelques exemples

Soit $u = at + b$ l'éq. d'une ligne rapportée à des coordonnées polaires, On peut écrire $u = a\left(t + \frac{b}{a}\right)$



Prenant $xAx' = \frac{b}{a}$, l'arc mAx' sera $t + \frac{b}{a}$, par consᵗ l'éq. de la courbe lorsqu'on prend Ax' pour axe sera $u = at$. Cette éq. est celle d'une courbe qu'on appelle la spirale d'Archimède.

Si ds cette éq. on fait $t = 0$ on en tire $u = 0$ par consᵗ la courbe passe par le point A. Pour avoir une suite de points on fait successivement $t = \pi$ $t = 2\pi$ ... et on en tire $u = a\pi$, $u = 2a\pi$. Si on donne à t des valeurs nég. les valeurs de u seront aussi négatives, par consᵗ la courbe est symétrique.

Dans cette courbe nous aurons

$$\text{sous. tang.} = A\mathcal{T} = \frac{u^2 dt}{du} = \frac{u^2}{a} = at^2$$

$$\text{tang.} = M\mathcal{T} = u\sqrt{1 + u^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2} = at\sqrt{1 + t^2}$$

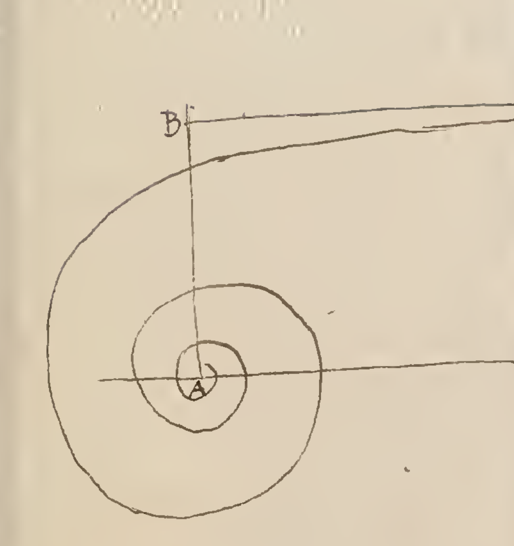
$$\text{sous-norm.} = AR = \frac{du}{dt} = a$$

Ainsi ds la spirale d'Archimède la sous-normale est constante.

$$\text{normale} = MR = \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2t^2 + a^2} = a\sqrt{t^2+1}$$

Soit maintenant la spirale hyperbolique dont l'éq. est $ut = m$. A mesure que t augmente u diminue, mais u ne sera $=0$ que pour $t = \infty$. Ainsi la courbe s'approche toujs du pt A sans jamais le rencontrer. Lorsque les valeurs de t diminuent celles de u augmentent, enfin pour $t=0$, u est infini. Différentiant l'éq. on en tire

$$u\,dt + t\,du = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dt}{du} = -\frac{t}{u} = -\frac{t^2}{m}$$



et par consᵗ

$$\text{sous-tang} = -m \,.\, \text{tang.} = \frac{m}{t}\sqrt{1 + \frac{m^2}{t^2}\left(\frac{t^4}{m^2}\right)} = \frac{m}{t}\sqrt{1+t^2}$$

On voit donc que la sous-tangente est constante. D'après cela on peut déterminer l'asymptote à la courbe. En effet le point de contact de l'asymptote étant situé à une puissance infinie, on aura pour ce pt $u = \infty$ et par suite $t=0$, l'asymptote est donc parallèle à l'axe. Ainsi élevant au pt A une perpend. à l'axe, prenant AB égale à la soustangente, la ligne BC parallèle à l'axe sera l'asymptote.

Prenons l'éq. $u = a^t$ de la spirale logarithmique. Pour $t=0$ $u=1$, par consᵗ la courbe coupe l'axe à une distance du point A égale à 1. Si on fait croître t jusqu'à l'infini, u croîtra jusqu'à l'infini, ainsi la courbe va en s'éloignant



sous celle du point A. Si on donne à t des valeurs négatives, celles de u iront en diminuant jusqu'à par const. la courbe s'approche du point A, jusqu'à l'infini. Différentiant l'éq. on a

$$du = a^t la\,dt \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{dt} = a^t la.$$

$$\text{sout-tang} = \frac{a^{2t}}{a^t la} = \frac{a^t}{la}, \quad \text{tang.} = a^t\sqrt{1+a^{2t}a^{2t}(la)^2}$$

$$A\mathcal{C} = \frac{u^2}{a^t la} = \frac{u}{la}, \quad \text{tang. } AM\mathcal{C} = \frac{A\mathcal{C}}{AM} = \frac{1}{la}.$$

Ainsi ds la spirale logarithmique, l'angle que la tangente fait avec le rayon vecteur qui passe par le point de contact est constant.

Théorie des Contacts.

Soient $y = f(x)$, $z = F(x)$ les éq. de deux courbes qui ont un pt commun dont les coordonnées sont x, y. Je remplace ds ces éq. x par $x+h$ et je développe les éq. ~~en passant~~ j'aurai

$$Y = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$Z = z + \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

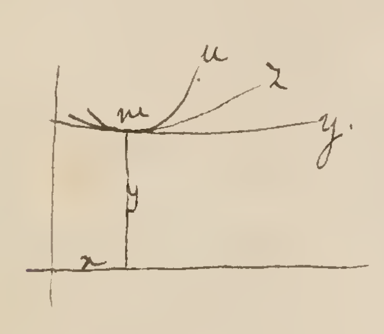
Prenant la différence entre ces 2 séries

$$Z - Y = \left(\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3z}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

$Z - Y$ est la distance entre les deux courbes pour les points correspondants à $x+h$, cette distance sera d'autant plus petite, qu'il y aura plus de termes des deux 1res séries respectivement égaux. C'est là ce qui constitue les contacts plus ou moins intimes. Lorsqu'on a simplement

(A) Le contact du 1er ordre se nomme tangence, celui du 2d osculation. On pourrait nommer triapsie le contact du 3e ordre tétrapsie celui du 4e &c.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ il y a contact du 1er ordre, et on dit alors que les courbes sont tangentes. Lorsqu'on a $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ et en même tems $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$ il y a contact du 2d ordre, et alors les courbes sont osculatrices. (A)



Pour mieux voir en quoi consistent ces différents degrés de rapprochement, nous considérerons une troisième courbe $u = \varphi(x)$ qui passe par le point x, y. Remplaçant x par $x+h$ nous aurons

$$Y = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \eta h.$$
$$Z = z + \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \zeta h$$
$$U = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \delta h.$$

~~h représent~~ η, ζ, δ représentent des quantités qui s'évanouissent pour $h=0$. On tire de ces éq.

$$Z - Y = \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx}\right) h + (\zeta - \eta) h$$
$$U - Y = \left(\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx}\right) h + (\delta - \eta) h.$$

Si $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ on pourra poser

$$U - Y > Z - Y \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx} + \delta - \eta > \zeta - \eta.$$
$$\text{ou bien} \quad \frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx} > \zeta - \delta.$$

Condition à laquelle on pourra touj.s satisfaire en prenant h assez petit, (car ζ et δ deviennent nuls pour $h=0$) à moins que l'on n'ait $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$. Ainsi lorsqu'on a entre les deux courbes proposées la relation $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ la 3e courbe ne peut passer entre les deux que lorsque $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

Si outre la condition $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ on avait de plus $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ en développant un terme de plus on aurait

$$Y = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \eta' h.$$
$$Z = z + \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \zeta' h.$$
$$V = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \delta' h.$$

$$Z - Y = \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + (\zeta' - \eta')h.$$
$$V - Y = \left(\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + (\delta' - \eta')h.$$
$$V - Y > Z - Y \text{ ou } \left(\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + (\delta' - \eta')h > (\zeta' - \eta')h$$

ou bien $\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h}{2} > \zeta' - \delta'$.

condition qui pourra toujours être satisfaite, à moins qu'on n'ait $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$. Ainsi lorsqu'on a entre les deux éq. les conditions $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ la 3e courbe ne peut passer entre les deux 1res pour un pt très voisin de m, que lorsque $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

On continuerait de même pour les contacts des ordres suivants.

D'après ce que nous venons de dire étant donnée une courbe $y = f(x)$, on peut trouver une courbe de nature déterminée qui ait avec la 1re un contact de l'ordre le plus élevé possible. Pour cela $z = F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ représentant l'éq. de la courbe qu'on veut déterminer on posera

$$z = y \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$$

On aura ainsi des éq. entre α, β, γ... au moyen desquelles on pourra déterminer ces quantités. On pourra poser autant d'éq. qu'il y a d'inconnues α, β, γ... par const. le nombre qui exprime l'ordre du contact sera égal au nombre des constantes de la courbe moins un.

Proposons nous de trouver la tangente à la courbe

$$y = f(x)$$

u et t étant les coordonnées de la tangente son éq. sera de la forme

$$u = \alpha t + \beta. \quad (A)$$

Si x, y sont les coord. du point de contact on aura

$$y = \alpha x + \beta \quad (B)$$

Ms on doit avoir la relation.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} \text{ ou bien } \frac{dy}{dx} = \alpha.$$

Substituant ds (B) on trouve $\beta = y - \frac{dy}{dx} x$.

Mettant ces valeurs ds (A) il vient pour l'éq. cherché

$$u = \frac{dy}{dx} t + y - \frac{dy}{dx} x.$$

$$\text{ou} \quad u - y = \frac{dy}{dx}(t - x),$$

éq. que ns avions déjà trouvée.

Cherchons le cercle osculateur de la courbe $y = f(x)$. L'éq. de ce cercle sera de la forme

$$(z-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2.$$

Differentiant $(z-\beta)\frac{dz}{dx} + (x-\alpha) = 0$

$$(z-\beta)\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

Mais pour que le cercle soit tangent à la courbe on

point x, y on doit avoir $y = z$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$.

Substituant

$$(y-\mathcal{C})^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2.$$
$$(y-\mathcal{C})\frac{dy}{dx} + (x-\alpha) = 0$$
$$(y-\mathcal{C})\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

Ou bien en posant $\frac{dy}{dx} = p$ $\frac{d^2y}{dx^2} = q$

$$(1) \quad (y-\mathcal{C})^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2$$
$$(2) \quad (y-\mathcal{C})p + x - \alpha = 0$$
$$(3). \quad (y-\mathcal{C})q + p^2 + 1 = 0$$

De la 3e on tire $y - \mathcal{C} = -\frac{1+p^2}{q}$ substituant ds la 2de

on a $x - \alpha = \frac{1+p^2}{q}p.$

Mettant ces valeurs ds la 1re éq. il vient

$$\rho^2 = \frac{(1+p^2)^2}{q^2} + \frac{(1+p^2)^2}{q^2}p^2 = \frac{(1+p^2)^3}{q^2}$$
$$\rho = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

La valeur de ρ devant être absolue on prendra le signe plus ou le signe moins selon que q sera positif ou négatif. On a donc pour déterminer les constantes du cercle osculateur.

$$\mathcal{C} = y + \frac{1+p^2}{q}, \quad \alpha = x - \frac{1+p^2}{q}p, \quad \rho = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Nous avons donc quatre éq. entre les quantités $\alpha, \mathcal{C}, \rho, x, y$. Si on élimine ρ, x, y on aura une relation en $\alpha, \mathcal{C}$ qui sera l'éq. de la courbe des centres

Proposons nous de trouver cette courbe des centres dans la parabole.

Son éq. étant $x^2 = my$ nous aurons en différentiant

$$2x = m\frac{dy}{dx} \quad \text{d'où} \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m}$$

$$2 = m\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{d'où} \quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m}$$

On tire de là $\dfrac{1+p^2}{q} = \dfrac{1+\frac{4x^2}{m^2}}{\frac{2}{m}} = \dfrac{m^2+4x^2}{2m}$

par consᵗ.

$$\beta = y + \frac{1+p^2}{q} = \frac{x^2}{m} + \frac{m^2+4x^2}{2m} = \frac{3x^2}{m} + \frac{m}{2}$$

$$\alpha = x - \frac{1+p^2}{q}p = x - \frac{m^2+4x^2}{2m}\frac{2x}{m} = -\frac{4x^3}{m^2}.$$

Si on prend $AA' = \frac{m}{2}$ et qu'on considère $A'x'$ comme nouvel axe des x on aura $\beta' = \beta - \frac{m}{2} = \frac{3x^2}{m}$ par consᵗ

$$\beta'^3 = \frac{27x^6}{m^3} \quad \text{et} \quad \alpha^2 = \frac{16x^6}{m^4}.$$

$$\frac{\beta'^3}{\alpha^2} = \frac{27m}{16} \qquad \beta'^3 = \frac{27m}{16}\alpha^2.$$

Éq. qui ressemble à celle de la parabole. Si on fait $\alpha = 0$ on a $\beta' = 0$ par consᵗ la courbe passe au point A'. Si on fait $\alpha = \pm a$. β' ne change pas, par consᵗ la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y et elle n'a aucun pᵗ au dessous de $A'x'$. Si on différentie cette éq. on trouve

$$3\beta^2\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{27m}{8}\alpha \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{9m\alpha}{8\beta^2}$$

Mais $\alpha^2 = \dfrac{16\beta^3}{27m}$ d'où $\alpha = \dfrac{4\beta^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3m}}$ et $9m\alpha = 4\beta^{\frac{3}{2}}\sqrt{3m}$

par consᵗ $\dfrac{d\beta}{d\alpha} = \dfrac{\beta^{\frac{3}{2}}\sqrt{3m}}{2\beta^2} = \dfrac{\sqrt{3m}}{2\sqrt{\beta}}.$

pour $\beta = 0$ $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ est ∞; par consᵗ la courbe a un rebroussement au pᵗ A'. Cette courbe est ce qu'on appelle la parabole cubique.

Cherchons la courbe des centres dans l'ellipse.

Son éq. est $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$

Differentiant $a^2y\frac{dy}{dx}+b^2x=0$ d'où $p=\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$

$$a^2y\frac{d^2y}{dx^2}+a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+b^2=0 \quad \text{d'où}$$

$$q=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2+\frac{b^4x^2}{a^2y^2}}{a^2y}=-\frac{a^2b^2y^2+b^4x^2}{a^4y^3}.$$

$$q=-\frac{a^2b^4-a^2b^2y^2+a^2b^2y^2}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

$$\frac{1+p^2}{q}=-\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)a^2y^3}{b^4}=-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}y.$$

$$\alpha=x-\frac{1+p^2}{q}p=x-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)y}{a^2b^4}\cdot\frac{b^2x}{a^2y}=x\left(1-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^2}\right)$$

$$\beta=y-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}y=y\left(1-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}\right).$$

Mais on a $\quad a^4y^2=a^4b^2-a^2b^2x^2.$

et $\quad b^4x^2=a^2b^4-a^2b^2y^2.$

Par const.

$$\alpha=x\left(1-\frac{a^4b^2-a^2b^2x^2+b^4x^2}{a^4b^2}\right)=\frac{b^2x^3(a^2-b^2)}{a^4b^2}$$

$$\beta=y\left(1-\frac{a^4y^2+a^2b^4-a^2b^2y^2}{a^2b^4}\right)=-\frac{a^2y^3(a^2-b^2)}{a^2b^4}$$

posant $a^2-b^2=c^2$ on trouve

$$\alpha=\frac{c^2x^3}{a^4}, \quad \beta=-\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

de là on tire

$$x^3=\frac{a^4\alpha}{c^2} \qquad y^3=-\frac{b^4\beta}{c^2}$$

$$x=\frac{a^{\frac{4}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \qquad y=-\frac{b^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}.$$

Substituant ces valeurs ds l'éq. de l'ellipse on trouve

$$\frac{a^2 b^{\frac{8}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^2 a^{\frac{8}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = a^2 b^2$$

d'où $$\frac{b^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = 1. \quad (A)$$

Telle est l'éq. de la courbe des centres de l'ellipse. Mais on peut écrire cette éq. sous une forme plus simple. Car en posant $\beta = 0$ et représentant par α' la valeur de α correspondante, on a

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} \alpha'^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = 1, \quad \alpha'^{\frac{2}{3}} = \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \quad \alpha' = \pm \frac{c^2}{a}, \quad a = \pm \frac{c^2}{\alpha'}$$

Posant de même $\alpha = 0$ et représentant par β' la valeur de β correspondante on a

$$\frac{b^{\frac{2}{3}} \beta'^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = 1, \quad \beta'^{\frac{2}{3}} = \frac{c^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}, \quad \beta' = \pm \frac{c^2}{b}; \quad b = \pm \frac{c^2}{\beta'}.$$

Substituant ces valeurs de a et de b ds l'éq (A) d'où

$$\frac{c^{\frac{4}{3}}}{\beta'^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} + \frac{c^{\frac{4}{3}}}{\alpha'^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = 1$$

$$\alpha'^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} + \beta'^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} = \alpha'^{\frac{2}{3}} \beta'^{\frac{2}{3}}$$

éq. qui est la même que celle de l'ellipse ds laquelle on a remplacé l'exposant 2 par $\frac{2}{3}$.

On trouverait de même pour l'hyperbole

$$\alpha'^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} - \beta'^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} = -\alpha'^{\frac{2}{3}} \beta'^{\frac{2}{3}}.$$

Il existe une relation simple entre le rayon de courbure et la normale. En effet on a

$$\rho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Nommant N la normale

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+p^2}$$

$$(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{N}{y} \quad (1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{N^3}{y^3}$$

par suite $$\rho = \pm \frac{N^3}{q y^3}.$$

Trouver le rayon de courbure des sections coniques dont l'éq. est $y^2 = mx + nx^2$.

Différentiant $2y\frac{dy}{dx} = \frac{m}{2} + 2nx$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{n - \left(\frac{m}{2} + nx\right)^2}{y^2}}{y} = \frac{ny^2 - \frac{m^2}{4} - mnx - n^2x^2}{y^3}.$$

$qy^3 = -\frac{1}{4}m^2$ d'où $\rho = \frac{N^3}{\frac{1}{4}m^2}$.

Pour trouver le rayon de courbure d'une courbe plane, nous avons posé l'éq.

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2.$$

et différentiant en considérant x cô la variable indépendant, nous avons trouvé

$$\rho = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Dans cette expression p est $\frac{dy}{dx}$ et q est la différentielle de cette expression en supposant x la variable indépendante. Si on avait différentié la 1re éq. en ne supposant aucune variable indépendante on serait parvenu à la même expression de ρ ds laquelle q serait la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, en supposant que ni y, ni x ne sont variables indépendantes.

En effet en différentiant l'éq.

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2.$$

on a $\quad (y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx = 0.$

$$(y-\beta)\,d^2y + (x-\alpha)\,d^2x = -dy^2 - dx^2.$$

De ces deux dernières éq. on tire

$$x - \alpha = \frac{(dx^2+dy^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad y - \beta = -\frac{(dx^2+dy^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Mais nous avons les formules

$$dy = p\,dx \qquad d^2y = p\,d^2x + q\,dx^2$$

Substituant

$$x-\alpha = \frac{dx^2(1+p^2)\,p\,dx}{p\,dx\,d^2x + q\,dx^3 - p\,dx\,d^2x} = \frac{1+p^2}{q}\cdot p$$

$$y-\beta = -\frac{dx^2(1+p^2)\,dx}{q\,dx^3} = -\frac{1+p^2}{q}$$

Au moyen de ces deux valeurs on trouverait la valeur de ρ que nous avons déjà obtenue. Mais on peut la trouver directement. Car nous avons

$$\rho^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \frac{(dx^2+dy^2)^3}{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}$$

$$\rho = \pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx^3}{q\,dx^3} = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

qui est la valeur que nous avions déjà trouvée.

fig. (A)

Si sur une courbe quelconque BM on prend deux pts m, M et que par le pt m on mène une tangente, prenant $mO = mI$ on aura

— $mM < mI + IM$ d'où $MO < MI$.

Mais MI divisé par pP devient nul pour $X = x$ donc à plus forte raison MO divisé par pP est nul pour $X=x$. Mais $MO = mI$ croît proportionnellement à pP, par const. Si on considère l'arc comme une variable ~~mO sera la différentielle~~ qu'on prenne par ex. $Bm = t$ mO sera égal à dt. Mais si on prend mM infiniment petit cet arc pourra ~~être~~ considéré comme une ligne droite d'où on aura

$$mM = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$$

Mais à la limite la différentielle est égale à la différence, on a donc ds ce cas $mM = dt$, $X-x = dx$, $Y-y = dy$.

par const. $dt = \sqrt{dx^2+dy^2}$.

On peut chercher la valeur de ρ en supposant que t est la variable indépendante. Pour cela différentiant l'expression précédente on trouve

$$d^2t = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0$$

d'où $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$ et $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$

Mais nous avons

$$\rho = \pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Substituant à d^2x sa valeur

$$\rho = \pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}dx}{d^2y(dx^2+d^2y^2)} = \pm\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2y} = \pm\frac{dx\,dt}{d^2y}.$$

Cette valeur de ρ est équivalente à celle que nous avions déjà trouvée. En effet nous avons

$$dt = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+p^2}$$

d'où $d^2t = d^2x\sqrt{1+p^2} + \frac{p\,dp\,dx}{\sqrt{1+p^2}} = d^2x\sqrt{1+p^2} + \frac{pq\,dx^2}{\sqrt{1+p^2}}.$

Mais t étant la variable indépendante $d^2t = 0$.

par const. $d^2x(1+p^2) + pq\,dx^2 = 0$

d'où $d^2x = -\frac{pq\,dx^2}{1+p^2}$.

Substituant à la place de dt et de d^2y leurs valeurs ds l'expression de ρ

$$\rho = \pm\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{p\,d^2x + q\,dx^2}.$$

Mettant à la place de d^2x sa valeur

$$\rho = \pm\frac{dx^2\sqrt{1+p^2}}{q\,dx^2 - \frac{p^2q\,dx^2}{1+p^2}} = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

expression que nous avions déjà trouvée.

Propriétés de la ligne des Centres.

Nous avons trouvé entre les coordonnées du centre du cercle osculateur les relations

(1) $(y-b)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2$

(2) $(y-b)dy+(x-\alpha)dx=0$

(3) $(y-b)d^2y+(x-\alpha)d^2x+dy^2+dx^2=0.$

De l'éq (2) on tire

$$b-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x)$$

Mais l'éq. de la normale à une courbe est

$$u-y=-\frac{dx}{dy}(t-x)$$

Cette éq. est la même que la précédente ds laquelle on a changé b en u et α en t, Donc le centre du cercle osculateur en un pt quelc. d'une courbe est sur la normale à la courbe en ce point.

Si on différentie l'éq. (1) en ~~ne~~ considérant toutes les lettres cō variables on aura

$$(y-b)dy-(y-b)db+(x-\alpha)dx-(x-\alpha)d\alpha=\rho d\rho. \quad (A)$$

Différentiant l'éq. (2)

$$(y-b)d^2y+dy^2-db\,dy+(x-\alpha)d^2x+dx^2-d\alpha\,dx=0.$$

Retranchant ~~de~~ cette éq. de l'éq. (3) il vient

$$db\,dy+d\alpha\,dx=0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{db}{d\alpha}.$$

Mais l'éq. ~~(2) donne~~ de la normale à la courbe est

$$b-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x)$$

Mettant à la place de $\frac{dx}{dy}$ sa valeur

$$y-b=\frac{db}{d\alpha}(x-\alpha)$$

qui est l'éq. de la tangente à la courbe des centres. Par consq. la tangente à la courbe des centres est normale à la courbe proposée. Il suit de là que si par différents pts de la courbe proposée on mène des normales à cette courbe, ~~&~~ la ligne tangente à toutes

ces normales sera la ligne des centres.

Soit BO' un arc de la courbe des centres si OO' est un arc très petit nous aurons d'après ce que nous avons vu précédemment fig (A)

$$ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2} = d\alpha\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}.$$

Mais OO' étant infiniment petit l'éq.

$$\rho d\rho = -(y-\beta)d\beta - (x-\alpha)dx$$

qu'on obtient en retranchant l'éq. (2) de l'éq (A)

donne
$$\rho d\rho = -d\alpha\left(\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2+1\right)(x-\alpha)$$

Mais
$$\rho = \pm (x-\alpha)\sqrt{\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2+1}$$

Divisant $d\rho = \mp d\alpha\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}$

On aura donc $d\rho + ds = 0$ d'où $d(\rho+S) = 0$ par const. $\rho + s$ = constante. D'après cela si on attache un fil d'une longueur donnée à un point de la courbe des centres et qu'on entoure ce fil sur cette courbe l'extrémité libre décrira la courbe proposée. C'est pour cela que la ligne des centres d'une courbe se nomme sa développée.

La Cycloïde est une courbe engendrée par un pt fixe d'un ~~courb~~ cercle qui roule sur une droite.

Prenons l'axe des x pour la droite fixe et supposons que le pt fixe M touche cet axe à l'origine. Soit M une position quelconque de ce pt. Nommons $\underline{a}$ le rayon du cercle, $\underline{u}$ la longueur d'un arc semblable à MR et décrit avec un rayon égal à l'unité. Ns aurons $MR = AR = au$

$MQ = a \sin u$, $CQ = a \cos u$. par const.

$$x = a(u - \sin u)$$

$$a \cos u = a - y \quad \cos u = \frac{a-y}{a}$$

$$x = a\left(\text{arc.}\cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{1 - \frac{(a-y)^2}{a^2}}\right)$$

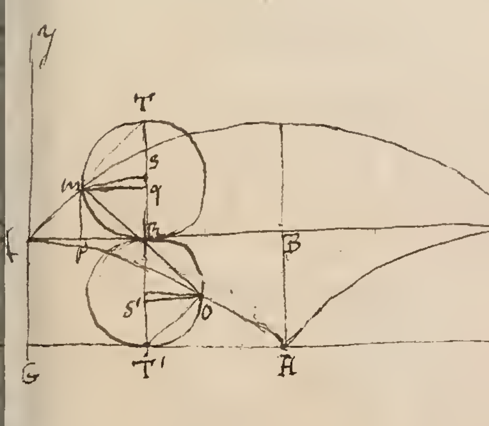
$$x = a \,\text{arc}\cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

Telle est l'éq. de la courbe. Différentiant les deux membres on trouve

$$dx = \frac{a \cdot \frac{dy}{a}}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - 2ay + y^2}{a^2}}} - \frac{a dy - y dy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

$$dx = \frac{a dy - a dy + y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$



Si nous cherchons la sous normale de cette courbe nous aurons $pR = \frac{y dy}{dx} = \sqrt{2ay - y^2}$

Mais $mq = a \sin u = a\sqrt{1 - \frac{(a-y)^2}{a^2}} = \sqrt{2ay - y^2}$

Par const. $pR = mq$. c.à.d. que la normale passe par le point de contact. Pour trouver le rayon de courbure je remarque que nous avons

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1} \quad \text{d'où} \quad 1 + p^2 = \frac{2a}{y}$$

$$q = \frac{-\frac{a}{y^2}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}} = -\frac{a}{y^2}.$$

Par const. $\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = 2\sqrt{2ay}.$

Mais $mR = \sqrt{\overline{mp}^2 + \overline{pR}^2} = \sqrt{2ay}$

Donc si O est le centre du cercle osculateur on aura $mR = RO$. Si on prend $RT' = RT$ les deux triangles mRT ROT' seront égaux, par const. S' étant le milieu de RT', on

aura $S'O = mS = S'R = ST'$. Ainsi le cercle décrit du point S' comme centre avec SO pour rayon passera par les pts R et T'.

De plus nous aurons

arc OT' = arc $MT' = RMT - MR = 4B - 4R = RB = T'H$.

Ainsi la développée de la cycloïde est la cycloïde AH égale à la proposée mais différemment placée.

Discutons l'éq. de la courbe qui est

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

Lorsque y est nég. ou $> 2a$ x est imaginaire, ce qu'on pouvait prévoir d'après la construction de la courbe. Le cosinus d'un arc ne changeant pas lorsqu'on augmente cet arc d'un certain nombre de circonférences on peut poser

$$x = 2\pi a + a \text{ arc cos } \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

D'après cela on voit qu'on peut donner à x une valeur quelconque depuis 0 jusqu'à $\pm\infty$. Pour $y = 0$ on a $x = 2\pi a$ par cons.t la courbe touche l'axe des x en des points dont les abscisses sont égales à un nombre exact de circonférences. La tangente de l'angle qu'une touchante en un pt quelconque fait avec l'axe des x est $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$. Lorsque $y = 0$ cette tang. est infinie, par cons.t tous les pts où la courbe coupe l'axe des x sont des pts de rebroussement. Si on fait $y = 2a$ la tang. est égale à zéro, ainsi la droite parallèle à l'axe des x et menée à une distance égale à $2a$ est tangente à la courbe en une infinité de points.

Des courbes dans l'espace.

Une ligne rapportée à trois axes coordonnés est représentée par deux éq. de la forme $x=f(z)$, $y=\mathfrak{F}(z)$. Pour qu'il y ait contact du 2d ordre entre deux courbes dont les coordonnées sont x, y, z pour l'une, t, u, v pour l'autre, il faut qu'on ait

$$t=x\ ,\ u=y\ ,\ v=z$$
$$\frac{dt}{dv}=\frac{dx}{dz}\quad \frac{du}{dv}=\frac{dy}{dz}$$
$$\frac{d^2t}{dv^2}=\frac{d^2x}{dz^2}\quad \frac{d^2u}{dv^2}=\frac{d^2y}{dz^2}.$$

Si on ne suppose aucune variable indépendante, ces conditions se réduisent à

$$t=x\ ,\ u=y\ ,\ v=z$$
$$dt=dx\quad du=dy\quad dv=dz$$
$$d^2t=d^2x\quad d^2u=d^2y\quad d^2v=d^2z.$$

Si on veut trouver la tangente à une courbe rapportée à 3 axes, ses éq. seront de la forme

$$t-x=a(v-z)\qquad u-y=b(v-z)$$

Différentiant ces éq. on a

$$dt=a\,dv\qquad du=b\,dv$$

d'où $\quad a=\dfrac{dt}{dv}\quad b=\dfrac{du}{dv}$

Mais pour qu'il y ait contact on doit avoir

$$\frac{dt}{dv}=\frac{dx}{dz}\ .\ \frac{du}{dv}=\frac{dy}{dz}$$

Donc les éq. de la tangente seront

$$t-x=\frac{dx}{dz}(v-z)\ \text{et}\ u-y=\frac{dy}{dz}(v-z).$$

D'après cela on voit que par un pt pris sur une courbe considérée ds l'espace on ne peut mener qu'une tangente à cette courbe. Mais une normale à la courbe ~~autre~~

est une ligne perpend. à la tangente ; on peut donc mener une infinité de normales. Le plan qui les contient est le plan normal.

Puisque le plan normal est perpend. à la tangente son éq. sera

$$dx(t-x) + dy(u-y) + dz(v-z) = 0.$$

Tous les plans qui passent par la tangente sont des plans tangents. Parmi tous ces plans il en est un qui est le plan osculateur. Pour le trouver, nous savons que son éq. sera de la forme

$$A(t-x) + B(u-y) + v-z = 0.$$

Différentiant on a

$$A\,dt + B\,du + dv = 0$$

$$A\,d^2t + B\,d^2u + d^2v = 0.$$

Le plan étant osculateur ces relations sont les mêmes que celles-ci

$$A\,dx + B\,dy = -dz$$

$$A\,d^2x + B\,d^2y = -d^2z.$$

On tire de ces deux éq.

$$A = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \qquad B = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Substituant ces valeurs ds l'éq. du plan, on trouve pour l'éq. du plan osculateur.

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(t-x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(u-y) + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(v-z) = 0.$$

Proposons nous de trouver l'éq. de la sphère osculatrice. Représentons par α β γ les coord. du centre et par ρ le rayon son éq. sera de la forme.

$$(t-\alpha)^2 + (u-\beta)^2 + (v-\gamma)^2 = \rho^2.$$

Diffᵗ. $(t-\alpha)dt + (u-\beta)du + (v-\gamma)dv = 0$

$$(t-\alpha)d^2t + (u-\beta)d^2u + (v-\gamma)d^2v + dt^2 + du^2 + dv^2 = 0.$$

Mais pour qu'il y ait contact du 2ᵈ ordre on doit avoir $t = x \ldots$ $dt = dx \ldots$ $d^2t = d^2x \ldots$ On aura donc

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2$$

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy+(z-\gamma)\,dz=0$$

$$(x-\alpha)\,d^2x+(y-\beta)\,d^2y+(z-\gamma)\,d^2z=-dx^2-dy^2-dz^2.$$

Mais prenant sur la courbe un p^t quelc. B et posant Bm = s, BM = S, on aura mM = S − s, à la limite S − s = ds. Mais si mM est un arc très petit on peut le considérer co une ligne droite et on aura

$$mM=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}$$

ou bien $\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

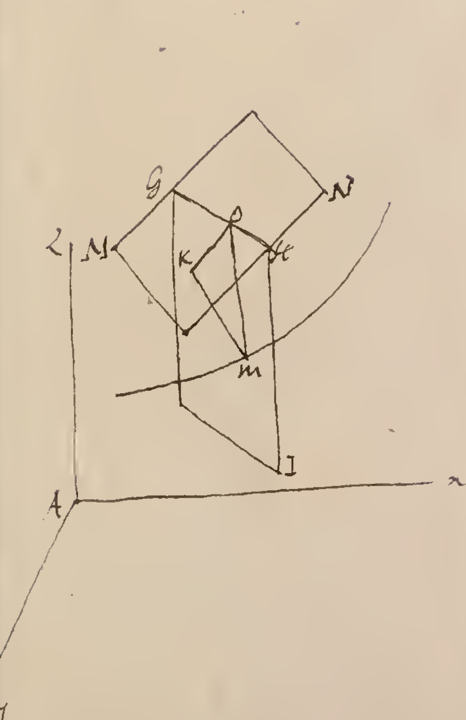
Mettant cette valeur ds la dernière éq. On aura pour déterminer le centre de la sphère osculatrice

$$(M)\quad (x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy+(z-\gamma)\,dz=0$$

$$(N)\quad (x-\alpha)\,d^2x+(y-\beta)\,d^2y+(z-\gamma)\,d^2z=-ds^2$$

Par const^t en un même point de la courbe il y a une infinité de sphères osculatrices, dont tous les centres sont situés à l'intersection de deux plans, dont l'un est le plan normal.

Toutes ces sphères passant par un même point et ayant leurs centres sur une même droite, se coupent toutes suivant un cercle qui passe par le p^t de contact et dont le plan est perpend. à la droite des centres. Le rayon de ce cercle qu'on nomme le cercle osculateur est ce qu'on appelle le rayon de courbure (a) V. P. 155



Pour trouver le rayon de courbure soit GI le plan normal MN le 2^d plan et GH la ligne des centres par le point m de contact, j'abaisse mK perpend. sur MN et du p^t K je mène KO je joins mO le plan mKO sera perpend à GH je joins mO le plan mKO sera perpend. à GH, par const. mO est le rayon de

courbure. Pour calculer mO je remarque que nous avons

$$mK = mO \sin mOK. \quad (A)$$

mOK est l'angle des deux plans, nous avons donc

$$\cos mOK = -\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$$

mais $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$

d'où $dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s$

Donc $\cos mOK = -\frac{d^2s}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$.

et par suite $\sin. mOK = \sqrt{1 - \frac{d^2s^2}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$.

$$\sin mOK = \sqrt{\frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

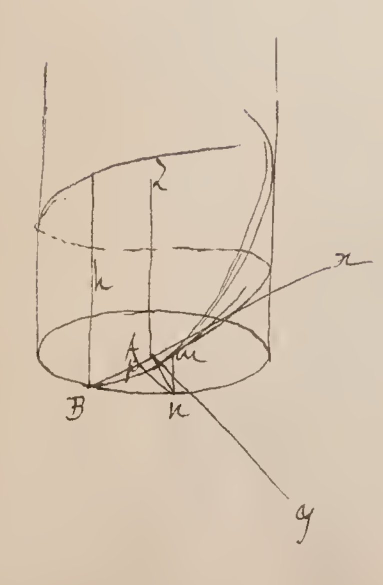
L'éq. (A) donne $mO = \frac{mK}{\sin mOK}$ ~~on aura donc~~

mK étant la distance du p^t m au plan MN on a

$$\sim\!\!\sim mK = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$$

on aura donc

$$mO = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}.$$



L'hélice est une courbe engendrée par l'hypot. d'un triangle rectangle qui glisse s'enroule sur un cylindre de manière que la base du triangle s'enveloppe sur la base du cylindre.

Soit B l'origine de la courbe, je prens BA pour axe des x, une perpend. à cette ligne au p^t A pour axe des y et l'axe du cylindre pour axe des z. Supposons

que la base soit un cercle dont le rayon est a, u un point quelc. de la courbe et u la longueur de l'arc Bu.
L'angle BAu sera égal à $\frac{u}{a}$, mais le triangle rectangle pAu donne $\tang pAu = \frac{pu}{Ap} = \frac{y}{x}$ donc

$$\tang \frac{u}{a} = \frac{y}{x}$$

d'où $\frac{u}{a} = \text{arc tang} \frac{y}{x}$ $\quad u = a \,\text{arc tang} \frac{y}{x}$.
Mais $\qquad mu = u \tang 6$
en nommant 6 l'angle du triangle rectangle Donc

$$z = a \tang 6 \,\text{arc tang} \frac{y}{x}$$

Si h est la hauteur d'un pas de l'hélice on aura

$$\tang 6 = \frac{h}{2a\pi}$$

donc $\qquad z = \dfrac{h \,\text{arc tang} \frac{y}{x}}{2\pi}$. on en tire

$$\frac{2\pi z}{h} = \text{arc tang} \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = \tang \frac{2\pi z}{h}$$

Mais la projection de l'hélice sur le plan des xy étant $\quad x^2+y^2 = a^2 \quad$ on a

$$\sin \frac{2\pi z}{h} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{a}$$

$$\cos \frac{2\pi z}{h} = \sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}} = \frac{x}{a}$$

Les éq. de la courbe sont donc

$$y = a \sin \frac{2\pi z}{h} \quad x = a \cos \frac{2\pi z}{h}.$$

Calculons le rayon de courbure. Pour cela différentiant les éq. précédentes nous aurons

$$dy = a \cos \frac{2\pi z}{h} \frac{2\pi}{h} dz, \quad dx = -a \sin \frac{2\pi z}{h} \frac{2\pi}{h} dz.$$

d'où $ds^2 = dz^2\left(\frac{4a^2\pi^2}{h^2}+1\right)$ et $ds = \frac{dz}{h}\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}$.

$$d^2y = \frac{2\pi a}{h} \cos \frac{2\pi z}{h} d^2z - \frac{4\pi^2 a}{h^2} \sin \frac{2\pi z}{h} dz^2.$$

$$d^2x = -\frac{2\pi a}{h} \sin \frac{2\pi z}{h} d^2z - \frac{4\pi^2 a}{h^2} \cos \frac{2\pi z}{h} dz^2.$$

$$d^2s = \frac{d^2z}{h}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

Nous aurons donc

$$d^2x^2+d^2y^2 = \frac{4\pi^2a^2}{h^2}d^2z^2 + \frac{16\pi^4a^2}{h^4}dz^4$$ et par suite.

$$\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2a^2}{h^2}d^2z^2 + \frac{16\pi^4a^2}{h^4}dz^2+dz^2-\frac{d^2z^2}{h^2}4\pi^2a^2-d^2z^2}$$

$$\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2} = \frac{4\pi^2a}{h^2}dz^2.$$

Donc on aura pour le rayon de courbure

$$\frac{dz^2\left(\frac{4a^2\pi^2}{h^2}+1\right)}{\frac{4\pi^2a^2}{h^2}dz^2} = \frac{4a^2\pi^2+h^2}{4a^2\pi^2}.$$

On voit donc que ds l'hélice le rayon de courbure est constant.

Lorsqu'on a l'éq. d'une courbe ds l'espace si on y fait $z=0$ on aura l'éq. d'une courbe sur le plan des xy. Ainsi en faisant $z=0$ ds l'expression du rayon de courbure d'une courbe ds l'espace, on doit trouver l'expression du rayon de courbure d'une courbe plane. C'est en effet ce qui a lieu, car lorsqu'on fait $z=0$ ds la valeur du rayon de courbure on trouve

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2-d^2s^2}}$$

Mais alors

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+p^2}$$

d'où $$d^2s = d^2x\sqrt{1+p^2} + \frac{dx\,p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

nous avons $\frac{dy}{dx}=p$ $dy = p\,dx$

$d^2y = p\,d^2x + dp\,dx$

$d^2y = p\,d^2x + q\,dx^2.$

Substituant

$$\rho = \frac{dx^2(1+p^2)}{\sqrt{d^2x^2+(p\,d^2x+q\,dx^2)^2-\left(d^2x\sqrt{1+p^2}+\frac{dx^2p\,q}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2}}$$

$$\rho = \frac{dx^2(1+p^2)}{\sqrt{d^2x^2(1+p^2)+2pq\,dx^2d^2x+q^2dx^4-\left(d^2x^2(1+p^2)+2pq\,d^2x\,dx^2+\frac{dx^4p^2q^2}{1+p^2}\right)}}$$

$$\rho = \pm \frac{dx^2(1+p^2)}{\sqrt{q^2dx^4 - \frac{p^2q^2dx^4}{1+p^2}}} = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \text{. c.q.f.d.}$$

On peut se proposer de trouver pour les courbes de l'espace une expression du rayon de courbure indépendante de ds. Pour cela nous avons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

d'où $$ds\, d^2s = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds}.$$

Substituant

$$\rho = \pm \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - \frac{(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2}{ds^2}}}$$

$$\rho = \pm \frac{ds^3}{\sqrt{ds^2d^2x^2 + ds^2d^2y^2 + ds^2d^2z^2 - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2}}$$

$$\rho = \pm \frac{ds^3}{\sqrt{d^2x^2(ds^2 - dx^2) + \ldots - 2\,dy\,dz\,d^2y\,d^2z + \ldots}}$$

$$\rho = \pm \frac{ds^3}{\sqrt{d^2x^2dy^2 + d^2x^2dz^2 - 2\,dy\,dz\,d^2y\,d^2z + \ldots}}$$

$$\rho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}}$$

qui est l'expression que nous cherchions. Si ds cette valeur on fait $z = 0$ on aura

$$\rho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{dx^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q\,dx^3}.$$

$$\rho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$ expression que nous avions

déjà trouvée.

Des Surfaces courbes.

Soient $w = f(x, y, z) = 0$ $W = F(x, y, z) = 0$ les éq. de deux surfaces. L'ensemble de ces éq. représente une ligne. Si on mène une tangente en un point quelconque de cette ligne, ses éq. seront de la forme.

$$t - x = \frac{dx}{dz}(v - z) \quad u - y = \frac{dy}{dz}(v - z)$$

Pour déterminer $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ je différentie les deux éq. proposées en considérant z cō la variable indépend.^{te} ce qui donne

$$\frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dz} + \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\frac{dW}{dx} \frac{dx}{dz} + \frac{dW}{dy} \frac{dy}{dz} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Il faudrait tirer de là les valeurs de $\frac{dx}{dz}$ $\frac{dy}{dz}$ et les substituer ds les 1res éq. Mais il vaut mieux tirer ces valeurs des 1res éq. et les substituer ds les 2des.

On aura

$$\frac{dw}{dx}(t - x) + \frac{dw}{dy}(u - y) + \frac{dw}{dz}(v - z) = 0 \quad (A)$$

$$\frac{dW}{dx}(t - x) + \frac{dW}{dy}(u - y) + \frac{dW}{dz}(v - z) = 0.$$

pour les éq. de la tangente.

On peut faire varier la surface $W = 0$ d'une infinité de manières,(*) et on aura autant de courbes tracées sur la surface $w = 0$ et passant toutes par le même point. L'éq. (A) sera commune à toutes les tangentes à ces courbes menées par le pt commun. Et cō cette éq. représente un plan toutes ces tangentes sont ds un même plan qu'on appelle le plan tangent. Ainsi l'éq. (A) est l'éq. d'un plan tangent à une

(*) en l'assujétissant à passer toujt par le pt de contact.

surface courbe.

La normale est la perpendiculaire au plan tangent par const. ses éq. seront

$$(t-x)\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx}(v-z)$$

$$(u-y)\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dy}(v-z)$$

On peut mettre ces éq. et celle du plan tangent sous une forme plus simple. Pour cela je suppose qu'on ait résolu l'éq. $w=f(x,y,z)$ et qu'elle donne $z=f(x,y)$. Différentiant on aura

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

posant $p=\frac{dz}{dx}$ $q=\frac{dz}{dy}$ elle devient

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Mais en différentiant $w=0$ on obtient

$$\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz = 0$$

mettant à la place de dz sa valeur.

$$\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}(p\,dx + q\,dy) = 0.$$

ou bien

$$\left(\frac{dw}{dx} + p\frac{dw}{dz}\right)dx + \left(\frac{dw}{dy} + q\frac{dw}{dz}\right)dy = 0.$$

dx et dy étant des accroissements indépendants ~~Si on suppose que x soit~~ seule variable ~~et que y~~ l'un de l'autre on peut supposer que ~~soit constante on aura~~ $dy=0$ et par const.

$$\left(\frac{dw}{dx} + p\frac{dw}{dz}\right)dx = 0$$

on aura de même $\frac{dw}{dy} + q\frac{dw}{dz} = 0$

on tire de ces éq.

$$p = -\frac{\frac{dw}{dx}}{\frac{dw}{dz}}, \quad q = -\frac{\frac{dw}{dy}}{\frac{dw}{dz}}.$$

On voit par là qu'on peut trouver les valeurs de p et de q, quoique on ne sache pas résoudre l'éq. $W=0$. Si on substitue ces valeurs ds l'éq. du plan tangent on aura en réduisant

$$p(t-x)+q(u-y)-(v-z)=0.$$

Substituant ds les éq. de la normale il vient

$$(t-x)+p(v-z)=0 \qquad (u-y)+q(v-z)=0.$$

Soit m le pt de contact du plan tangent, mR la normale, KR et nK sont les lignes qu'on appelle sous normales. Si on fait $v=0$ ds les éq. de la normale on en tire

$$AL = t = x+pz. \qquad LR = u = y+qz.$$

Donc on aura pour les valeurs des sous-normales

$$Kn = pz \qquad KR = qz.$$

et pour la normale

$$mR = \sqrt{z^2+\overline{nR}^2} = \sqrt{z^2+p^2z^2+q^2z^2} = z\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Par un point d'une surface on fait passer un plan et on demande le rayon de courbure de l'intersection.

Pour cela je remarque que lorsqu'une courbe est plane le plan osculateur est le plan de la courbe, car le plan osculateur est celui qui a le contact du 2d ordre, c.à.d. le contact de l'ordre le plus élevé possible. D'après cela l'éq. du plan sécant sera la même que celle du plan osculateur à une ligne courbe. c.à.d.

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(t-x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(u-y) + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(v-z) = 0.$$

L'éq. du plan tangent qui passe par le point donné sur la surface est

$$p(t-x) + q(u-y) - (v-z) = 0.$$

Pour trouver l'angle de ces deux plans nous avons la formule

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \quad \text{d'où on tire}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(AB'-BA')^2 + (CA'-AC')^2 + (BC'-CB')^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Mais nous avons trouvé

$$\rho = \pm \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}$$

Nous aurons donc pour l'angle des deux plans

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{[q(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - p(dz\,d^2x - dx\,d^2z)]^2 + \&c}}{\sqrt{1+p^2+q^2}\left(\pm\frac{ds^3}{\rho}\right)}.$$

Pour réduire cette expression, je différentie l'éq.

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad \text{ce qui donne}$$

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + dp\,dx + dq\,dy.$$

~~De plus nous avons~~

~~$dz = p\,dx \quad dz = q\,dy$~~

Ainsi le 1er terme de $\sin\theta$ se réduira à

$$\left[(q\,dy + p\,dx)d^2z - dz(q\,d^2y + p\,d^2x)\right]^2$$

ou bien $\quad dz^2(dp\,dx + dq\,dy)^2$

Réduisant de même les termes suivants on trouvera

$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(dp\,dx+dq\,dy)^2}}{\frac{ds^3}{\rho}\sqrt{1+p^2+q^2}} = \pm\frac{\rho(dp\,dx+dq\,dy)}{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

On tire de là

$$\rho = \pm \frac{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{dp\,dx+dq\,dy} \sin\theta.$$

Représentant par R le rayon de courbure de l'intersection faite par un plan perpendiculaire au plan tangent, $\sin\theta$ sera égal à 1; ds ce cas et on aura

$$R = \pm \frac{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{dp.dx+dq\,dy}.$$

Ainsi $\rho = R \sin\theta$.

Proposons nous de trouver quelle parmi tous les plans sécants qui passent par les pts de contact et qui sont perpend. au plan tangent quel est celui qui donne la courbe dont le rayon de courbure est un maximum et celui qui donne la courbe dont le rayon est un minimum.

Pour cela nous avons trouvé la valeur générale de R ds laquelle on a

$$p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy}$$

Je différencie ces expressions et je pose

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = r \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{dp}{dy} = s$$

$$\frac{d^2z}{dy\,dx} = \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{dq}{dx} = s \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{dq}{dy} = t.$$

On tirera de là

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = \frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy = s\,dx + t\,dy.$$

substituant ds la valeur de R on a

$$R = \pm \frac{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2}$$

$$R = \pm \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

Dans cette valeur $\frac{dx}{ds}$ est le cosinus de l'angle que la tangente fait avec l'axe des x. En effet les éq. de la tangente sont

$$t - x = \frac{dx}{dz}(v - z) \qquad u - y = \frac{dy}{dz}(v - z)$$

Le cosinus de l'angle que cette droite fait avec l'axe des x est

$$\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds}$$

On démontrerait de même que $\frac{dy}{ds}$ est le cos. de l'angle que la tangente fait avec l'axe des y. Ainsi $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ sont les variables dans cette valeur. Pour déterminer ces quantités de manière que R soit un maximum ou un minimum il faut les déterminer de manière que le dénominateur soit un minimum ou un maximum. Pour cela différentions le dénominateur ~~ces cosinus~~ et égalons la différentielle à zéro, les valeurs de $\frac{dx}{ds}$ et de $\frac{dy}{ds}$ que ns en tirerons seront celles qui correspondent à un maximum ou à un minimum.

Nous aurons.

$$2r\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+2s\left(\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)+2t\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}=0.$$

ou bien réduisant

$$(A)\quad \left(r\frac{dx}{ds}+s\frac{dy}{ds}\right)d\frac{dx}{ds}=-\left(s\frac{dx}{ds}+t\frac{dy}{ds}\right)d\frac{dy}{ds}.$$

Mais $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$

remplaçant dz par sa valeur $p\,dx+q\,dy$

$$dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2=ds^2$$

ou $(1+p^2)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+(1+q^2)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2pq\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=1$ (M)

Différentiant

$$(1+p^2)\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+pq\left(\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)+(1+q^2)\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}=0.$$

$$(B)\quad \left\{(1+p^2)\frac{dx}{ds}+pq\frac{dy}{ds}\right\}d\frac{dx}{ds}=-\left\{(1+q^2)\frac{dy}{ds}+pq\frac{dx}{ds}\right\}d\frac{dy}{ds}.$$

Divisant l'éq. (A) par l'éq. (B).

$$(C)\quad \frac{r\frac{dx}{ds}+s\frac{dy}{ds}}{(1+p^2)\frac{dx}{ds}+pq\frac{dy}{ds}}=\frac{s\frac{dx}{ds}+t\frac{dy}{ds}}{pq\frac{dx}{ds}+(1+q^2)\frac{dy}{ds}}.$$

Divisant les deux termes par $\frac{dx}{ds}$

$$\frac{r+s\frac{dy}{dx}}{1+p^2+pq\frac{dy}{dx}}=\frac{s+t\frac{dy}{dx}}{pq+(1+q^2)\frac{dy}{dx}}$$

Développant et ordonnant par rapport à $\frac{dy}{dx}$

$$pqr+(1+q^2)r\frac{dy}{dx}+pqs\frac{dy}{dx}+(1+q^2)s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=$$
$$(1+p^2)s+pqs\frac{dy}{dx}+(1+p^2)t\frac{dy}{dx}+pqt\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

$$(P)\quad \left\{(1+q^2)s-pqt\right\}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\right\}\frac{dy}{dx}+pqr-(1+p^2)s=0$$

Dans cette éq. $\frac{dy}{dx}$ est seul inconnu. Or si par l'origine nous menons une droite Am parallèle à la tangente, ~~nous~~ dont AP est la projection nous aurons

$$\text{tang}\,PAQ=\frac{PQ}{AQ}=\frac{AR}{AQ}=\frac{Am\cos mAR}{Am\cos mAQ}=\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}=\frac{dy}{dx}$$

Ainsi en déterminant $\frac{dy}{dx}$ nous connaitrons la direction du plan vertical ds lequel se trouve la tangente par laquelle passe le plan cherché.

La dernière éq. donne deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ on obtiendra donc deux tangentes dont l'une correspondra au rayon maximum et l'autre au rayon minimum. Mais si on transforme les axes en d'autres tels que le plan des xy soit parallèle à la tangente on aura

$$p' = \frac{dz'}{dx'} = 0 \qquad q' = \frac{dz'}{dy'} = 0$$

et l'éq. précédente deviendra

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r' - t'}{s'} \frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Soient α et β les deux angles que les projections des tangentes font avec l'axe des x nous aurons $\tang \alpha \tang \beta = -1$. Donc les projections de ces tangentes sont perpend. et par const. elles le sont elles mêmes puisqu'elles sont ds un plan parallèle au plan de projection

Pour déterminer les longueurs des deux rayons de courbure représentons par D chacun des membres de l'éq. (C) nous aurons en multipliant le 1er par $\frac{dx}{ds}$ le 2^d^ par $\frac{dy}{ds}$

$$(1)\; D = \frac{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}}{(1+p^2)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + pq\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}} \qquad (2)\; D = \frac{s\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{pq\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) + (1+q^2)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

Ajoutant les numérateurs et les dénominateurs et observant que la somme des dénom. est égale

au premier membre de l'éq (M) ns aurons

$$D = r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Mais cette expression est égale au dénomi. de la valeur de R nous aurons donc

$$R = \pm\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D}$$

Ainsi pour connaître R il suffit de déterminer D. Pour cela on tire de l'éq. (1) en divisant par $\frac{dx}{ds}$

$$\left\{\mathcal{D}(1+p^2)-r\right\}\frac{dx}{ds} = -\left\{\mathcal{D}pq-s\right)\frac{dy}{ds}$$

et de l'éq. (2) en divisant par $\frac{dy}{ds}$

$$\left(\mathcal{D}pq-s\right)\frac{dx}{ds} = -\left\{\mathcal{D}(1+q^2)-t\right\}\frac{dy}{ds}.$$

Divisant ces deux éq. on a

$$\frac{\mathcal{D}(1+p^2)-r}{\mathcal{D}pq-s} = \frac{\mathcal{D}pq-s}{\mathcal{D}(1+q^2)-t}.$$

Réduisant cette éq. on trouve

$$(1+p^2+q^2)\mathcal{D}^2 - \left\{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\right\}\mathcal{D} + rt - s^2 = 0.$$

$$\mathcal{D} = \frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\pm\sqrt{\left\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\right\}^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)}}{2(1+p^2+q^2)}$$

On aura donc

$$R = \frac{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+q^2)r-2pqs+(1+q^2)t\pm\sqrt{\left\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\right\}^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)}}$$

Lorsque $rt > s^2$ le signe du ~~signe~~ radical n'influe pas sur le signe de R alors, les deux rayons de courbure sont de même signe. Dans ce cas les points de la surface situés près du point de contact sont tous du même côté du plan

tangent. En effet l'éq. de la surface étant

$$z=f(x,y)$$

on a

$$\frac{dz}{dx}=p \quad \frac{dz}{dy}=q \quad \frac{d^2z}{dx^2}=r \quad \frac{d^2z}{dxdy}=s \quad \frac{d^2z}{dy^2}=t.$$

Remplaçant ds l'éq. x par $X=x+h$ et y par $Y=y+k$ on aura.

$$Z = z + ph + r\frac{h^2}{2} + \&c \ldots$$
$$+ qk + shk$$
$$+ tk^2$$

L'éq. du plan tangent est

$$p(t-x) + q(u-y) - (v-z) = 0.$$

Si ds cette éq. on remplace ~~[illegible]~~ t par $x+h$ et u par $y+k$ on aura en représentant par V la valeur correspondante de v.

$$V = z+ph+qk. \qquad \text{d'où}$$

$$Z-V = \frac{rh^2+2shk+tk^2}{2} + \&c.$$

$Z-V$ est la distance entre un point de la surface et le pt correspondant du plan tangent. Mais si on égale à zéro le numérateur du ~~la~~ 1er terme de $Z-V$ en le divisant par h^2 on aura

$$t\frac{k^2}{h^2} + 2s\frac{k}{h}+r=0 \qquad \frac{k}{h} = -\frac{s\pm\sqrt{s^2-tr}}{t}.$$

Lorsque $tr > s^2$ la valeur de $\frac{k}{h}$ est imaginaire. Ainsi le signe du 1r terme de $Z-V$ ne changera pas lorsque k ou h changeront de signe.(*) Ainsi la surface sera d'un seul côté du plan tangent pour des pts peu éloignés du pt de contact.

Lorsque $rt < s^2$, ce qui a toujs lieu lorsque r et t sont de signes contraires, les valeurs de $\frac{k}{h}$ sont de signes contraires.

(*) Mais on peut prendre k et h assez petits pour que le signe de tte la valeur de $Z-V$ dépende de celui du 1r terme.

Alors le plan tangent coupe la courbe au point de contact; car alors $\frac{K}{h}$ ~~est~~ ~~un~~ réel et par consᵗ le 1ᵉʳ terme de $Z-V$ change de signe avec K et h.

Si $rt = s^2$, une des valeurs de R est infinie. Dans ce cas les deux valeurs de $\frac{K}{h}$ se réduisent à $-\frac{s}{t}$. Cette valeur rend le 1ᵉʳ terme de $Z-V$ égal à zéro. Ainsi la surface ~~est~~ a un contact du 2ᵈ ordre avec le plan tangent.

Lorsqu'un des rayons de courbure est infini la courbe correspondante est une ligne droite. En effet les deux valeurs de D peuvent se mettre sous la forme

$$D = \frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} \qquad D = \frac{s\,dx + t\,dy}{(1+q^2)\,dy + pq\,dx}$$

Mais $r\,dx + s\,dy = dp$ et $p\,dx + q\,dy = dz$ la 1ʳᵉ expression se réduira donc à

$$D = \frac{dp}{dx + p\,dz}$$

On trouvera de même pour la 2ᵈᵉ

$$D = \frac{dq}{dy + q\,dz}$$

Pour que $R = \infty$ il faut que $D = 0$ d'où

$$dp = 0 \quad \text{et} \quad dq = 0$$

p et q sont donc des constantes. ~~ce qui ne peut avoir lieu que lorsque~~ les éq. de la courbe sont donc de la forme $z = ax + \alpha$ $z = by + \beta$. &c.

Ainsi les surfaces ds lesquelles $rt = s^2$ sont engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Si

deux positions consécutives de cette génératrice se coupent la surface est développable

Si on égale les deux valeurs de D et qu'on développe on trouve

$$dp(dy+q\,dz) = dq(dx+p\,dz)$$

qui est une forme plus simple sous laquelle on peut mettre l'éq. (P). On démontre par le calcul intégral que cette éq. représente les projections des la plus grande et de la plus petite courbure sur le plan des xy.

Si par deux points très voisins pris sur une surface courbe on mène des normales à cette surface, et que ces normales se coupent, les deux points seront pris sur la courbe de plus grande ou de plus petite courbure.

En effet les éq. de la normale à la surface sont

$$t-x = -\frac{dz}{dx}(v-z) \qquad u-y = -\frac{dz}{dy}(v-z)$$

Pour avoir celles de la normale en un point très voisin, il faut remplacer x par $x+dx$, y par $y+dy$, z par $z+dz$. Alors on devra mettre à la place de $\frac{dz}{dx}$, (qui est la différentielle de z par rapport à x) la différentielle de $z+dz$ par rapport à x c. à d. $\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dx}$ ou bien $p+dp$. Les éq. de la normale peuvent se mettre sous la forme

$$t-x=-p(v-z) \qquad u-y=-q(v-z)$$

Elles deviendront par ces substitutions

$$t-x-dx=-(p+dp)(v-z-dz) \quad u-y-dy=-(q+dq)(v-z-dz).$$

Si ces deux normales se rencontrent, ces 4 ég. auront lieu en même tems et alors on obtiendra en retranchant les 2des des 1res

$$dx=dp(v-z-dz)-p\,dz \qquad dy=dq(v-z-dz)-q\,dz.$$

d'où on tire

$$v-z-dz=\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq}.$$

d'où $\qquad (dx+p\,dz)dq=(dy+q\,dz)dp.$

Cette ég. est celle des courbes dont le rayon est un maximum et un minimum. De &c.

Proposons nous de trouver la valeur du rayon d'une section quelc. perpend. au plan tangent, en fonction des rayons de plus grande et de plus petite courbure.

Pour cela nous savons que

$$R=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2s\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}.$$

Lorsque le plan tangent est parallèle au plan des xy, alors $p=0 \quad q=0$, et on a l'ég.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\cdot\frac{dy}{dx}-1=0$$

Si on veut que les axes des x et des y soient parallèles aux deux tangentes qui donnent les sections de plus grande et de plus petite courbure, il faudra que l'angle qu'une des tangentes fait avec l'axe des x soit $=0$ et que l'autre soit $=100^\circ$

c. à. d. que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ seront $\frac{dy}{dx}=0$; $\frac{dy}{dx}=\infty$. Mais les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ tirées de l'éq. précédente sont

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t-r\pm\sqrt{(t-r)^2+4s^2}}{2s}$$

extrayant la racine de la quantitée qui est sous le radical on trouve

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t-r\pm\left(t-r+\frac{2s^2}{t-r}+\&c\right)}{2s} \quad \text{c. à. d.}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t-r}{s}+\frac{s}{t-r}+\ldots \text{ et } \frac{dy}{dx}=-\frac{s}{t-r}+\&c -$$

Pour $s=0$ on a $\frac{dy}{dx}=\infty$ et $\frac{dy}{dx}=0$. Ainsi lorsque $p=0$, $q=0$, $s=0$, les 2 tangentes sont parallèles aux axes des x et des y. La valeur de R est alors $R=\frac{1}{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$

Nommons ε l'angle que le plan de la section dont il s'agit fait avec le plan des zx on aura

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varepsilon,\ \frac{dy}{ds}=\sin\varepsilon \text{ d'où } R=\frac{1}{r\cos^2\varepsilon+t\sin^2\varepsilon}$$

$$\text{donc}\quad \frac{1}{R}=r\cos^2\varepsilon+t\sin^2\varepsilon.$$

Représentons par R_1 le rayon de plus grande courbure et par R_2 celui de plus petite courbure. Si la 1e coïncide avec l'axe des x pour avoir sa valeur il faudra faire $\varepsilon=0$ ds l'expression précédente pour le 2d on fera $\varepsilon=100^0$ ce qui donne

$$\frac{1}{R_1}=r\ ,\quad \frac{1}{R_2}=t.$$

Substituant à la place de r et de t ds la valeur de $\frac{1}{R}$, leurs valeurs en fonction de R_1 et de R_2 qui

sont connus on aura

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{R_1} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{R_2}.$$

Formule au moyen de laquelle on peut déterminer le rayon de courbure d'une section normale quelconque en connaissant les rayons de plus grande et de plus petite courbure.

La sphère triapsique à une courbe à double courbure est celle qui a avec cette courbe un contact du 3e ordre. Pour trouver cette sphère il faut chercher les différentielles des 3 1ers ordres de l'éq

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2.$$

~~Avec~~ Faisant ensuite $t = x \ldots\; dt = dx \ldots\; d^2t = d^2x \ldots$ $d^3t = d^3x \ldots$ on aura

(1) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2$

(2) $(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy + (z-\gamma)dz = 0$

(3) $(x-\alpha)d^2x + (y-\beta)d^2y + (z-\gamma)d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$

(4) $(x-\alpha)d^3x + (y-\beta)d^3y + (z-\gamma)d^3z + dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0.$

On a 3 éq. entre α, β, γ. il n'y a donc qu'une sphère triapsique pour chaque point de la courbe.

Si on mène des sphères triapsiques aux différents points de la courbe et qu'on joigne les centres on aura la courbe des centres des sphères triapsiques. Je dis que les ~~autres~~ droites des centres des sphères osculatrices sont tangentes à cette courbe.

D'abord une quelconque de ces droites a un point commun avec la courbe dont il s'agit

(x) Puisque les coord. de ce centre satisfont aux éq. (2) (3)

car le centre de la sphère osculatrice est sur la droite des centres correspondant.(x) Il suffit donc de démontrer que la droite des centres et la tangente à la courbe des centres ont la même direction.

Pour cela je remarque que lorsqu'une droite est perpend. à un plan les cos. des angles que cette droite fait avec les axes sont proportionnels aux coefficients de l'éq. du plan; et réciproquement. Mais la droite des centres est perpendiculaire au plan du cercle osculateur, il suffit donc de faire voir que les angles de la tangente à la courbe des centres, avec les axes sont proportionnel. aux coefficients du plan osculateur.

Pour y parvenir je différentie l'éq. (2) par rapport à toutes les quantités et je retranche le résultat de l'éq. (3) ce qui donne

$$d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz = 0.$$

Raisonnant de même sur (3) et (4) on trouve

$$d\alpha d^2x + d\beta d^2y + d\gamma d^2z = 0.$$

On tire de ces deux éq.

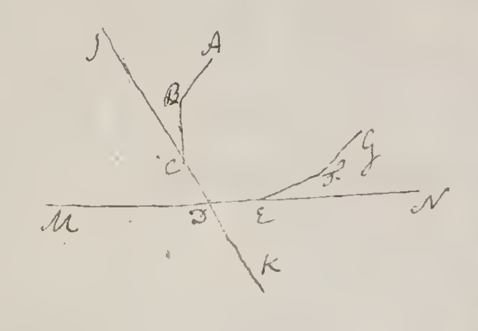
$$d\alpha = \frac{dy d^2z - dz d^2y}{dx d^2y - dy d^2x} d\gamma \qquad d\beta = \frac{dz d^2x - dx d^2z}{dx d^2y - dy d^2x} d\gamma$$

d'où on conclut

$$d\alpha : d\beta : d\gamma = dy d^2z - dz d^2y : dz d^2x - dx d^2z : dx d^2y - dy d^2x.$$

Les 3 conséquents de cette proportion sont les coefficients de l'éq. du plan osculateur De sic.

Il suit de là que la surface formée par les lignes des centres des sphères osculatrices est une



surface développable, car les tangentes à une même courbe à double courbure se coupent lorsqu'elles passent par des éléments consécutifs. Car si les côtés du polygone ADG diminuent jusqu'à devenir infiniment petits les lignes IK, MN qui seront alors les tangentes à deux éléments consécutifs de la courbe se couperont toujs au pt D.

Si la courbe à double courbure est sphérique c.à.d. si elle peut être tracée sur une sphère, elle n'aura qu'une seule sphère osculatrice, qui sera celle sur laquelle la courbe est tracée. Toutes les lignes des centres passeront donc par le centre de cette sphère, par consq dans ce cas la surface des centres est un cône. Si la courbe est plane les droites des centres des sphères osculatrices seront toutes perpendicu. au plan de la courbe, (puisqu'elles sont perp. au plan du cercle osculateur) Alors la surface des centres sera une surface cylindrique.

Si on enroule sur la surface des centres un plan flexible et qu'on le déroule en partie par le point où la partie déroulée coupe la courbe menant ds le plan une droite quelconque lorsqu'on enveloppera de nouveau le plan, cette droite tracera sur la surface une développée de la courbe. Une courbe à double courbure

a donc une infinité de développées.

Cherchons le rayon de courbure d'une ligne rapportée à des coordonnées polaires.

Pour cela nous avons la formule

$$\rho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x}$$

Or si nous prenons ~~la~~ le pole A pour l'origine et la droite fixe Ax pour l'axe des x nous aurons

$$AP = x = u\cos t \quad PM = y = u\sin t.$$

Différentiant on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cos t - u\sin t \quad \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}\sin t + u\cos t.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\cos t - 2\frac{du}{dt}\sin t - u\cos t.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\sin t + 2\frac{du}{dt}\cos t - u\sin t.$$

Ajoutant les carrés des deux 1res différentielles et effectuant les calculs on trouve

$$dx^2 + dy^2 = \left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2\right\} dt^2.$$

Cherchant les valeurs de $dx d^2y$ et de $dy d^2x$, on trouve en retranchant ces quantités l'une de l'autre et réduisant

$$dx d^2y - dy d^2x = \left(u^2 + 2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u\frac{d^2u}{dt^2}\right) dt^3.$$

On aura donc

$$\rho = \frac{\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^2 + 2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u\frac{d^2u}{dt^2}}.$$

Prenons pour ex. la courbe ds laquelle l'angle que la tangente fait avec le rayon vecteur est constant.

Soit b cet angle si nous menons la sous tangente AT nous aurons $AT = u \tang b$. Mais nous avons trouvé pour la valeur de la sous tangente $\frac{u^2 dt}{du}$ on aura donc

$$\frac{u^2 dt}{du} = u \tang b, \quad \text{d'où}$$

$$dt = \frac{du \tang b}{u} = \tang b \, d\,lu.$$

On tire de là $t + c = \tang b \; lu.$

et si on prend l'angle $xAx' = c$ et qu'on prenne Ax' pour la droite fixe on aura pour l'éq. de la courbe

$$t = \tang b \; lu.$$

ou bien $\quad lu = \frac{t}{\tang b}$

ou enfin $\quad u = e^{\frac{t}{\tang b}}$

Nous aurons en différentiant

$$du = e^{\frac{t}{\tang b}} \cdot \frac{dt}{\tang b} \quad \text{d'où on tire}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{\tang b} \quad \text{et} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{du}{dt \tang b}$$

Substituant ds la valeur de ρ

$$\rho = \frac{\left\{\frac{u^2}{\tang^2 b} + u^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^2 + 2\frac{u^2}{\tang^2 b} - \frac{u^2}{\tang^2 b}} = \sqrt{u^2 + \frac{u^2}{\tang^2 b}}$$

$$\rho = u\sqrt{1 + \frac{1}{\tang^2 b}} = \frac{u}{\sin b}$$

Mais si ds cette courbe nous cherchons la valeur de la normale nous trouvons

$$u\sqrt{1+\left(\frac{du}{dt}\right)^2} = u\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 b}} = \frac{u \sec b}{\tan b} = \frac{u}{\sin b}$$

Donc ds la spirale pour laquelle l'angle du rayon vecteur et de la tangente est constant, le rayon de courbure est égal à la normale. Cette spirale se nomme la *spirale logarithmique*.

(a) Le plan du cercle osculateur est le même que le plan osculateur.

Car puisque le 1er de ces plans passe par le pt x, y, z son éq. seront de la forme

$$A(t-x) + B(u-y) + (v-z) = C. \quad (1)$$

Mais puisqu'il est perpend. à chacun des plans (1) et (N) on doit avoir

$$A\,dx + B\,dy = -dz$$

$$A\,d^2x + B\,d^2y = -d^2z$$

Tirant de là les valeurs de A et de B et les substituant ds (1) on retrouvera l'éq. du plan osculateur.

Calcul intégral.

Le calcul intégral a pour but de trouver une fonction dont on connait la différentielle. Si on a les fonctions

$$y = \mathfrak{F}(x) \quad \text{ou} \quad y = \mathfrak{F}(x) + c$$

on trouve en différentiant l'une et l'autre

$$dy = f(x)\, dx.$$

Par const. l'intégrale de $f(x)\,dx$ qu'on écrit $\int f(x)\,dx$ et qu'on prononce somme de $f(x)dx$ est $\int f(x)\,dx = \mathfrak{F}(x) + c.$

En différentiant les fonctions simples on a

$y = x + a \qquad dy = dx \quad \text{Donc} \quad \int dx = x + c$

$y = a - x \qquad dy = -dx \quad - - \quad \int -dx = c - x.$

$y = ax \qquad dy = a\,dx \qquad \int a\,dx = ax + c$

$y = \frac{a}{x} \qquad dy = -\frac{a}{x^2}dx \qquad \int -\frac{a}{x^2}dx = \frac{a}{x} + c$

$y = x^n \qquad dy = nx^{n-1}dx \; (A) \quad \int nx^{n-1}dx = x^n + c$

$y = lx \qquad dy = \frac{dx}{x} \qquad \int \frac{dx}{x} = lx + c$

$y = a^x \qquad dy = a^x\, la\, dx \qquad \int a^x\, la\, dx = a^x + c$

$y = \sin x \qquad dy = \cos x\, dx \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$

$y = \cos x \qquad dy = -\sin x\, dx \qquad \int -\sin x\, dx = \cos x + c$

$y = \tang x \qquad dy = \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang x + c.$

L'intégrale (A) se met sous une forme plus commode. On pose $n = m+1$; elle devient alors

$$\int (m+1) x^m dx = x^{m+1} + c.$$

Mais nous savons que

$$\int a\,dx = ax = a \int dx,$$

par const. lorsqu'un facteur constant est affecté

du signe $\int$ on peut mettre ce facteur en dehors. D'après cela l'expression précédente deviendra

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c. \quad (M)$$

Lorsqu'on fait $m=-1$ ds cette formule elle devient

$$\int x^{-1} dx = \frac{1}{0} + c$$

quantité qui est indéterminée puisque c peut être égal à $-\infty$. Pour trouver la vraie valeur de cette intégrale je remarque qu'on a

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = lx + c.$$

On peut parvenir au même résultat par une autre méthode. En effet remplaçons x par a ds l'éq. (M) et représentons par b ce que devient le 1r membre on aura

$$b = \frac{a^{m+1}}{m+1} + c$$

retranchant ce résultat de l'éq. (M)

$$\int x^m dx = b + \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + c.$$

Mais $x^{m+1} = 1 + (m+1) lx + \frac{(m+1)^2 lx^2}{1.2} + \cdots$

$$a^{m+1} = 1 + (m+1) la + \frac{(m+1)^2 la^2}{1.2} + \cdots$$

d'où $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} = lx - la + \frac{(m+1)(lx^2 - la^2)}{1.2} + \cdots$

Donc $\int x^m dx = lx - la + \frac{(m+1)(lx^2 - la^2)}{1.2} + \cdots + c.$

Pour $m=-1$ on a

$$\int x^{-1} dx = lx + c.$$

D'après ce que nous venons de voir nous savons intégrer les quantités qui sont des différentielles exactes des fonctions simples. Passons aux fonctions de fonctions.

Nous avons vu que lorsqu'on a une fonction

$$z = \mathcal{F}(f(x))$$

on trouve en posant $f(x) = y$ et différentiant

$$dz = \mathcal{F}'(y)\, f'(x)\, dx.$$

Donc réciproquement

$$\int \mathcal{F}'(y)\, f'(x)\, dx = \mathcal{F}(f(x)) + c.$$

Ainsi par ex.

$$\int (a+bx)^m\, b\, dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{m+1} + c.$$

Si le 2^d facteur n'était pas la différentielle exacte de la quantité dont le 1^r facteur est une fonction il faudrait faire en sorte que ce 2^d facteur fût une différentielle exacte en le multipliant ou le divisant par une constante. Si par ex. on voulait trouver l'intégrale de

$(a+bx)^m dx$ on poserait

$$\int (a+bx)^m dx = \frac{1}{b}\int (a+bx)^m\, b\, dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)} + c.$$

On aura de même

$$\int (a+bx^n)^p\, nb\, x^{n-1} dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1} + c.$$

$$\int (a+bx^n)^p x^{n-1} dx = \frac{1}{nb}\int (a+bx^n)^p\, nbx^{n-1} dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} + c.$$

Si on veut intégrer une fraction trop compliquée telle que $\dfrac{x^m dx}{(a+bx^{m+1})}$ où $x^m dx$ est la différentielle de $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ on pose $\dfrac{x^{m+1}}{m+1} = y$ et on aura

$$\int \frac{x^m dx}{a+bx^{m+1}} = \int \frac{dy}{a+(m+1)by} = \frac{1}{(m+1)b}\int \frac{(m+1)b\,dy}{a+(m+1)by} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\, l(a+(m+1)by) + c$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\, l(a+bx^{m+1}) + c.$$

Nous avons vu que si

$z = \sqrt{y}$ on a $dz = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. D'où

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y} + c.$$

Mais $\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}}$ donc $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} + c.$

c. à. d. que l'intégrale de la différentielle d'une quantité divisée par sa racine est égale au double de cette racine plus une constante.

Ainsi $\int \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{lx}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{lx}} = 2\sqrt{lx} + c.$

si on avait voulu trouver l'intégrale de $\frac{dx}{x\,lx}$ on aurait eu en posant $lx = y$ d'où $\frac{dx}{x} = dy$

$$\int \frac{dx}{x\,lx} = \int \frac{dy}{y} = ly + c = l.lx + c = l^2x + c.$$

Lorsque $z = a^y$ $dz = a^y\,la\,dy$ Donc

$$\int a^y dy = \frac{1}{la}\int a^y la\,dy = \frac{1}{la}a^y + c.$$

Par ex.

$$\int a^{\sin x}\cos x\,dx = \frac{a^{\sin x}}{la} + c.$$

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x} + c.$$

$$\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} + c. \quad \int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

Pour $z = \tang y$ on trouve $dz = \frac{dy}{\cos^2 y}$.

Donc $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \tang y + c$

$$\int \frac{x^m dx}{\cos^2 \frac{x^{m+1}}{m+1}} = \tang \frac{x^{m+1}}{m+1} + c.$$

Pour $z = \cot y$ on trouve $dz = -\frac{dy}{\sin^2 y}$

Dc $\int \frac{dy}{\sin^2 y} = -\cot y + c.$

Pour $z = l\sin x$ $\quad dz = \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \frac{dx}{\tang x}$

De $\int \frac{dx}{\tang x} = l\sin x + c.$

Pour $z = \arc\sin y$ $\quad dz = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

Donc $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arc\sin y + c.$

Mais si on a

$z = \arc\cos y$ on trouve $dz = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

d'où $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\arc\cos y + c.$

On voit donc que la même intégrale se présente sous deux formes différentes. Mais ces deux valeurs sont égales, car

$$\arc\sin y = \frac{\pi}{2} - \arc\cos y \quad \text{d'où}$$

$$\arc\sin y + c = -\arc\cos y + c.$$

Ex. $\int \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{1-lx^2}} = \arc\sin lx + c.$

$$\int \frac{3x^2dx}{\tang x^3} = l\sin x^3 + c.$$

$$\int \frac{x^2dx}{\tang x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\tang x^3} = \frac{1}{3} l\sin x^3 + c.$$

Pour $y = \arc\tang x$ $\quad dy = \frac{dx}{1+x^2}$

donc $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arc\tang x + c.$

Ex. $\int \frac{x^m dx}{1+x^{2m+2}}$ pour trouver cette intégrale je pose $x^{m+1} = y$ d'où $(m+1)x^m dx = dy$

Cette ~~ex~~expression deviendra

$$\int \frac{x^m dx}{1+x^{2m+2}} = \int \frac{\frac{dy}{m+1}}{1+y^2} = \frac{1}{m+1}\int \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$\frac{1}{m+1}\arc\tang x^{m+1} + c.$$

Intégration des fonctions à plusieurs variables

Nous avons vu que lorsque

$$u = f(x, y, z)$$

on a $$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Le cas le plus simple est celui où on a

$$u = x + y + z$$

alors $$du = dx + dy + dz.$$

Donc réciproquement

$$\int(dx + dy + dz) = u = x + y + z + C$$

c.à.d. que l'intégrale d'une somme de différentielles est égale à la somme des intégrales.

Ainsi $$\int\left(\cos x\,dx - \frac{2lx\,dx}{x} - \frac{b\,dx}{x^2}\right) = \sin x - (lx)^2 + \frac{b}{x} + c.$$

$$\int\left(a x^m dx - \frac{b\,dx}{\sqrt{x}} + a^x dx\right) = \frac{a x^{m+1}}{m+1} - 2b\sqrt{x} + \frac{a^x}{la} + c.$$

Lorsque $u = xy$ $du = x\,dy + y\,dx$

donc $$\int(x\,dy + y\,dx) = xy + c.$$

Ainsi $$\int\left(x\frac{dx}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,dx\right) = x\sqrt{x} + c = x^{\frac{3}{2}} + c$$

On aurait pu poser

$$\int\left(x\frac{dx}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,dx\right) = \int\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx + \sqrt{x}\,dx\right) = \int\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = x^{\frac{3}{2}} + c.$$

On aura de même

$$\int\left(x\frac{dx}{x} + lx\,dx\right) = x\,lx + c.$$

On serait parvenu au même résultat en intégrant chaque terme ~~par parties~~, car on aura alors

$$\int\left(x\frac{dx}{x} + lx\,dx\right) = x + \int lx\,dx = x + x(lx - 1) + c = x\,lx + c.$$

Cette règle sert quelquefois à trouver l'intégrale d'une fonction qui se compose du produit

d'une intégrale et d'une différentielle. Ainsi pour intégrer $\mathcal{L}x\,dx$ on commencera par intégrer $\mathcal{L}x\,dx + \frac{x\mathcal{L}e}{x}dx$ ce qui donne

$$\int\left(\mathcal{L}x\,dx + \frac{x\mathcal{L}e}{x}dx\right) = x\mathcal{L}x + c$$

d'où $\int \mathcal{L}x\,dx = x\mathcal{L}x + c - \int \frac{x\mathcal{L}e}{x}dx.$

$$\int \mathcal{L}x\,dx = x(\mathcal{L}x - \mathcal{L}e) + c = x\mathcal{L}\frac{x}{e} + c.$$

Cette méthode est ce qu'on nomme l'intégration par parties.

Lorsqu'on a $z = \frac{x}{y}$ on en tire

$$dz = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2}.$$

d'où $\int\left(\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2}\right) = \frac{x}{y}$

et $\int \frac{dx}{y} = \frac{x}{y} + \int \frac{x\,dy}{y^2}.$

Cette méthode ~~de différentiation~~ d'intégration rentre ds l'intégration par partie.

Intégration des fractions rationnelles.

Lorsqu'on a à intégrer une fraction algébrique rationnelle, si le numérateur est d'un degré plus élevé que le dénominateur on effectuera la division et on aura à différentier la somme d'un polynome entier et d'une fraction.

Soit donc la fraction $\frac{U}{V}$ dans laquelle le dénominateur est un polynome d'un degré ~~plus~~ élevé que le numérateur; on peut décomposer cette expression en une somme d'autres fractions dont les numérateurs sont constants

En effet supposons d'abord que le dénom. n'ait pas de racines égales et que ses facteurs soient $x-a$, $x-b$, ... Si $V=(x-a)Q$ on pourra poser

$$\frac{U}{V} = \frac{A}{x-a} + \frac{P}{Q}$$

En effet on en tire

$$\frac{U}{V} = \frac{AQ + P(x-a)}{(x-a)Q} \quad \text{d'où} \quad U = AQ + P(x-a) \quad (M)$$

Représentant par u et q ce que deviennent U et Q pour $x=a$ on aura

$$u = Aq \quad \text{d'où} \quad A = \frac{u}{q} \quad \text{et par suite}$$

$$P = \frac{U - \frac{u}{q}Q}{x-a}$$

Or U et V n'ont pas de facteur commun puisqu'on le supprimerait s'ils en avaient un. U n'est donc pas divisible par $x-a$ par consᵗ. u n'est pas nul. Mais le facteur $x-a$ n'entre qu'une fois dans V, donc Q n'est pas divisible par $x-a$ et par suite q n'est pas nul. La valeur de A n'est donc ni 0 ni $\frac{0}{0}$, ni ∞. La décomposition est donc toujours possible. Mais l'éq. (M) peut se mettre sous la forme

$$U - AQ = P(x-a) \quad \text{pour } x=a \quad U - AQ = 0$$

Donc $U - AQ$ ou $U - \frac{u}{q}Q$ est divisible par $x-a$, Par consᵗ la fraction $\frac{P}{Q}$ aura un dénom. d'un degré moins élevé que celui de $\frac{U}{V}$. Raisonnant sur $\frac{P}{Q}$ comme on a raisonné sur $\frac{U}{V}$ on décomposera cette fonction en une somme de fractions dont les numérateurs seront des constantes et les dénom. des facteurs du 1ᵉʳ degré.

D'après cela pour intégrer une expression fractionnaire ds laquelle le dénom. n'a pas de racines égales on la décomposera co nous venons de le dire et on intégrera ~~ce nous venons de~~ chaque terme,

Soit par ex. l'expression

$$\frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+11x-6}$$ ds laquelle le dénom.

est égal à $(x-1)(x-2)(x-3)$. Je pose

$$\frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{Q} = \frac{AQ+B(x-1)}{x^3-6x^2+11x-6}$$ d'où

$$AQ+B(x-1) = x^2-4x.$$ Faisant $x=1$ on a

$$A(1-2)(1-3) = 1-4 \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{3}{2} \quad \text{et}$$

$$B = \frac{x^2-4x+\frac{3}{2}(x^2-5x+6)}{x-1} = \frac{5}{2}x-9$$

Posant

$$\frac{\frac{5}{2}x-9}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{B_1}{Q_1} = \frac{A_1(x-3)+B_1(x-2)}{x^2-5x+6}.$$

on aura $\frac{5}{2}x-9 = A_1(x-3)+B_1(x-2)$ pour $x=2$

$$5-9 = -A_1 \quad \text{d'où} \quad A_1 = 4 \quad \text{et par suite}$$

$$B_1 = \frac{\frac{5}{2}x-9-4x+12}{x-2} = \frac{-3x+6}{2(x-2)} = -\frac{3}{2}$$

On aura donc

$$\frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+11x-6} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)} + 4\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

D'où $$\int\frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+11x-6}dx = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{x-2} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= -\frac{3}{2}l(x-1) + 4\,l(x-2) - \frac{3}{2}l(x-3) =$$

$$l.\frac{(x-2)^4}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons maintenant que le dénominateur de la fraction proposée renferme des facteurs égaux. Si par ex. il y a plusieurs facteurs égaux à $x-a$, alors Q sera divisible par $x-a$ et q sera 0, la valeur de A sera de ∞; c.à.d. que ds ce cas on ne peut pas faire la décomposition de cette manière.

Supposons que le facteur $x-a$ entre n fois dans V et qu'on ait $V=(x-a)^n R$. On pourra poser

$$\frac{U}{V} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{P}{(x-a)^{n-1}R}.$$

On en tire $\quad U = AR + P(x-a) \quad$ faisant $x=a$

$$A = \frac{u}{r} \quad \text{et par suite} \quad P = \frac{U - \frac{u}{r}R}{x-a}$$

On démontre cō précédemment que A n'est ni 0 ni ∞ ni $\frac{0}{0}$ et que le numér. de P est divisible par $x-a$. Le dénominateur de la fraction $\frac{P}{(x-a)^{n-1}R}$ sera d'un degré moins élevé que V et décomposant cette fraction cō on a décomposé $\frac{U}{V}$ &c on trouvera

$$\frac{U}{V} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^m} + \frac{B_1}{(x-b)^{m-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{B_{n-1}}{x-b} + \frac{G}{x-g} + \frac{H}{x-h} + \cdots$$

Pour intégrer une expression de cette forme je remarque que l'expression

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad \text{faisant } m=-n$$

$$\int \frac{dx}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \text{ Ainsi}$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

Prenons pour ~~tre~~ ex. la fraction

$$\frac{x^2-2x+5}{x^4-6x^2+8x-3}$$ de laquelle on a

$$x^4-6x^2+8x-3=(x-1)^3(x+3).$$

Je pose

$$\frac{x^2-2x+5}{x^4-6x^2+8x-3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2 R}.$$

on a $R=x+3$. On tire de cette identité

$$x^2-2x+5=A(x+3)+B(x-1).$$ pour $x=1$

$$A=\frac{4}{4}=1$$ et par suite

$$B=\frac{(x^2-2x+5)-x-3}{x-1}=x-2.$$

Posant

$$\frac{x-2}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{(x-1)(x+3)}$$ on en tire

$$x-2=A_1(x+3)+B_1(x-1).$$

faisant $x=1$ $A_1=\frac{-1}{4}$ et par suite

$$B_1=\frac{x-2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}{x-1}=\frac{5x-5}{4x-4}=\frac{5}{4}.$$

Enfin posant

$$\frac{\frac{5}{4}}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_2}{x+3}=\frac{A_2(x+3)+B_2(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

on en tire $\frac{5}{4}=A_2(x+3)+B_2(x-1)$

faisant $x=1$ $A_2=\frac{5}{16}$ et par suite

$$B_2=\frac{\frac{5}{4}-\frac{5}{16}(x+3)}{x-1}=-\frac{5x-5}{16(x-1)}=-\frac{5}{16}.$$

On aura donc

$$\int\frac{x^2-2x+5}{x^4-6x^2+8x-3}dx=\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{16}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{16}\int\frac{dx}{x+3}.$$

$$\int \frac{x^2-2x+5}{x^4-6x^2+8x-3}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)}+\frac{5}{16}l(x-1)-\frac{5}{16}l(x+3)$$

$$= \frac{x-3}{4(x-1)^2}+\frac{5}{16}\,l\,\frac{x-1}{x+3}.$$

On pourrait effectuer la même décomposition par la méthode des coefficients indéterminés. Ainsi pour la 1re fraction on pose

$$\frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

réduisant au même dénom. et égalant les numérateurs

$$x^2-4x = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Effectuant les multiplications et égalant les coefficients des mêmes puissances d'x on aura 3 éq. au moyen desquelles on déterminera A, B, C. Si le dénom. avait des racines égales la méthode serait la même. Ainsi pour la 2de fraction on posera

$$\frac{x^2-2x+5}{x^4-6x^2+8x-3} = \frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+3}.$$

$$x^2-2x+5 = A(x+3)+A_1(x-1)(x+3)+A_2(x-1)^2(x+3)+B(x-1)^3.$$

Dans la méthode précédente nous avons fait voir qu'on devait trouver pour A une valeur finie. Ainsi cette méthode démontre la possibilité de la décomposition. C'est en quoi elle a l'avantage sur celle des coefficients indéterminés.

On peut encore décomposer une fraction algébrique au moyen d'une méthode fondée sur le théorème de Maclaurin.

Soit $f(x)=0$ une éq. dont $\underline{a}$ est une racine. nous aurons.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \dots$$

Puisque a est racine de cette éq. elle est divisible par $x-a$ il faut donc que $f(a)=0$. Si $x-a$ était deux fois racine on devrait avoir $f(a)=0$ $f'(a)=0$. &c. Soit donc $\frac{u}{v}$ la fraction proposée. Je représente par u, u', u''... les dérivées des différents ordres du numérateur et par v, v', v''... celles du dénominateur.

Soit $x-a$ un facteur du dénominateur, remplaçant x par a ds les deux termes v sera égal à zéro et on aura

$$\frac{u}{v} = \frac{u + \frac{u'}{1}(x-a) + \frac{u''}{1.2}(x-a)^2 + \frac{u'''}{1.2.3}(x-a)^3 + \dots}{\frac{v'}{1}(x-a) + \frac{v''}{1.2}(x-a)^2 + \frac{v'''}{1.2.3}(x-a)^3 + \dots}$$

Posant cette expression $= \frac{A}{x-a} + \frac{P}{Q}$ réduisant au même dénominateur et égalant les numér. on aura

$$u + \frac{u'}{1}(x-a) + \frac{u''}{1.2}(x-a)^2 + \dots = \frac{v'}{1}A + \frac{v''}{1.2}(x-a)A + \frac{v'''}{1.2.3}(x-a)^2A + \dots$$
$$+ P(x-a).$$

d'où $u = v'A$ $A = \frac{u}{v'}$.

Connaissant A on pourrait trouver P et continuer cō nous l'avons déjà vu. Mais il est évident que si $x-b$ est un 2d facteur du

dénominateur, le même calcul donnerait la valeur de B. Donc pour avoir les numérateurs A, B... il suffit de prendre la dérivée de V, diviser ~~la~~ par cette dérivée, et remplacer successivement x par chacune des racines, dans le résultat.

Si le dénom. a plusieurs racines égales on pose

$$\frac{v}{V} = \frac{u + \frac{u'}{1}(x-a) + \frac{u''}{1.2}(x-a)^2 + \cdots}{\frac{V^n}{1\ldots n}(x-a)^n + \frac{V^{(n+1)}}{1\ldots(n+1)}(x-a)^{n+1} + \cdots} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{S}{Q}$$

Le 1r terme du dénom. est V^n parceque l'on suppose qu'il y a n facteurs égaux à $x-a$ et qu'alors les n 1rs termes sont nuls. Multipliant les deux membres de cette égalité par le dénom. du 1r on aura.

$$u + \frac{u'}{1}(x-a) + \frac{u''}{1.2}(x-a)^2 + \cdots = \frac{V^{(n)}}{1\ldots n}A + \frac{V^{(n+1)}}{1\ldots(n+1)}A(x-a) + \&c$$
$$+ \frac{V^{(n)}}{1\ldots n}A_1(x-a) + \&c$$

On aura ainsi n colonnes qui ne contiendront pas $\frac{S}{Q}$, et par consᵗ n éq. entre $A, A_1, \ldots A_n$ et $u, u', u''\ldots$ On pourra donc déterminer ces quantités, Ces éq. seront.

$$\frac{V^{(n)}}{1\ldots n}A = u \quad , \frac{V^{(n+1)}}{1\ldots(n+1)}A + \frac{V^{(n)}}{1\ldots n}A_1 = \frac{u'}{1} \quad \ldots$$

Comme la 1re de ces éq. contient seulement A, la 2de A et A_1 &c. on tirera la 1re la valeur de A. la substituant ds la 2de on aura immédiatement celle de A_1; ainsi de suite. Pour avoir ces valeurs il faudra former

les expressions générales de v, v', v'' &c et de $\varphi, \varphi', \varphi''$ &c. Pour trouver A, A'... il faudra remplacer ds ces expressions x par a, et le raisonnement que nous venons de faire s'applique au facteur $x-b$, aussi bien qu'au facteur $x-a$ il suffira de remplacer x par b dans v, v'... et φ, φ'... pour en tirer les valeurs de B, B_1 ... &c.

Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{x^2-2x+5}{x^4-6x^2+8x-3}$$

que nous avons déjà décomposée. On a

$$x^4-6x^2+8x-3=(x-1)^3(x+3).$$

Nous trouverons

$$v = x^2-2x+5 \qquad \varphi = x^4-6x^2+8x-3$$

$$v' = 2x-2 \qquad \varphi' = 4x^3-12x+8$$

$$\frac{v''}{2} = 1 \qquad \frac{\varphi''}{2} = 6x^2-6$$

$$\frac{\varphi'''}{2.3} = 4x$$

$$\frac{\varphi^{IV}}{2.3.4} = 1.$$

Faisant d'abord $x=1$ nous aurons $n=3$ et par suite

$$4A = 4 \text{ d'où } A=1,$$

$$1+4A_1 = 0 \text{ d'où } A_1 = -\frac{1}{4}$$

$$0 - \frac{1}{4} + 4A_2 = 1 \text{ d'où } A_2 = \frac{5}{16}$$

Faisant ensuite $x=-3$, n sera égal à 1 et on aura $\quad -64B = 20$ d'où $B = -\frac{5}{16}$.

Ce sont les résultats que nous avons déjà obtenus.

Tout ~~éq.~~ polynome qui ne contient pas de facteurs réels peut se décomposer en facteurs imaginaires de la forme $x-(a\pm b\sqrt{-1})$.

Soit $f(x)$ le polynome proposé, si ce polynome ne contient pas de racines ~~imaginaires il~~ réelles il ~~sera~~ de degré pair. On peut le voir par la géométrie, car si on pose $u=f(x)$. Or on peut trouver pour x une valeur telle que le polynome soit de même signe que le 1r terme en posant $x=+\infty$ et $x=-\infty$, si le degré est impair u changera de signe par const la courbe coupe l'axe des x et on a une valeur réelle de x qui donne $u=0$. Si au contraire le degré est pair u ne changera pas de signe pour $x=+\infty$ et $x=-\infty$ Ainsi la courbe pourra ne pas couper l'axe. Si elle le coupe elle le coupera un nombre pair de fois. Ainsi les racines réelles seront ds ce cas en nombre pair. Dans le 1r cas au contraire le nombre des racines réelles est impair.

Supposons donc que le polynome soit de degré pair et n'admette pas de facteurs réels. Soit

$$u=f(x)=x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\dots+sx+t.$$

Si $y+z\sqrt{-1}$ est une valeur de x la proposition sera démontrée, si on fait voir que y et z sont réels

Or en mettant à la place de x sa valeur nous aurons

$$u=f(y+z\sqrt{-1})=(y+z\sqrt{-1})^m+p(y+z\sqrt{-1})^{m-1}+\dots=\varphi(y,z)+\sqrt{-1}\,\psi(y,z).$$

Mais si le polynome égalé à zéro a pour racine $y+z\sqrt{-1}$, il aura aussi pour racine $y-z\sqrt{-1}$. Nous aurons donc

$$f(y+z\sqrt{-1}) = \varphi(y,z) + \sqrt{-1}\,\psi(y,z)$$

$$f(y-z\sqrt{-1}) = \varphi(y,z) - \sqrt{-1}\,\psi(y,z) \quad \text{Multipliant}$$

$$f(y+z\sqrt{-1})\,f(y-z\sqrt{-1}) = u = \varphi(y,z)^2 + \psi(y,z)^2$$

Cette dernière équation représente une surface qui ~~s'étend indéfiniment~~ n'a aucun point au dessous du plan des yz, car u est égal à la somme de deux carrés. De plus cette surface s'étend indéfiniment au dessus du plan des yz dans tous les sens. Car en donnant à y et à z des valeurs quelconques on a toujours une valeur réelle pour u. On peut le démontrer d'une autre manière, car si on pose

$$x = y+z\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

on aura

$$f(x) = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots =$$

$$\rho^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta) + p\rho^{m-1}(\cos(m-1)\theta + \sqrt{-1}\sin(m-1)\theta) + \dots$$

Mais $u = f(x) = \varphi(z,y) + \psi(y,z)\sqrt{-1}$.

On aura donc en égalant ces deux valeurs de $f(x)$

$$\varphi(y,z) = \rho^m \cos m\theta + p\rho^{m-1}\cos(m-1)\theta + q\rho^{m-2}\cos(m-2)\theta + \dots$$

$$\psi(y,z) = \rho^m \sin m\theta + p\rho^{m-1}\sin(m-1)\theta + q\rho^{m-2}\cos(m-2)\theta + \dots$$

On tire de là

$$u = \varphi(z,y)^2 + \psi(y,z)^2 =$$

$$\rho^{2m} + p^2\rho^{2m-2} + q^2\rho^{2m-4} + \dots$$

$$+ 2p\rho^{2m-2}\cos\theta + 2pq\rho^{2m-3}\cos\theta + \dots$$

Donnant à y et à z des valeurs très grandes

ρ qui est égal à $\sqrt{y^2+z^2}$ sera aussi très grand et ~~co~~ tous les termes de la valeur de u ont des exposants pairs, cette valeur sera toujs positive et ~~pourra~~ deviendra infiniment grande.

D'après cela la surface aura nécessairement un minimum. Je dis que pour ce point la surface touchera le plan des y, z c.à.d. qu'on aura $u=0$.

En effet soit $x=a$ la valeur qui donne un minimum de la fonction $u=f(x)$ prenant un point dont l'ordonnée est $a+g$ on aura

$$u=f(a)+\frac{g}{1}f'(a)+\frac{g^2}{1.2}f''(a)+\frac{g^3}{1.2.3}f'''(a)$$

Représentons par b et c les valeurs de y et de z correspondantes à $x=a$ et par $b+h$, $c+k$ les valeurs de z et de y correspondant à $x=a+g$. nous aurons

$$a=b+c\sqrt{-1}$$

$$a+g=b+h+(c+k)\sqrt{-1}$$

d'où $g=h+k\sqrt{-1}$

Posant $g=h+k\sqrt{-1}=z(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$.

d'où $z=\sqrt{h^2+k^2}$ $\quad t=\operatorname{arc\,tang}\frac{k}{h}$.

Nous aurons en mettant à la place ~~de~~ ~~a et~~ de g ~~leur~~ la valeur~~s~~ ds la série précédente

$$u=f(a)+\frac{z(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)}{1}f'(a)+\frac{z^2(\cos 2t+\sqrt{-1}\sin 2t)}{1.2}f''(a)$$

Or $f(x)=f(y+z\sqrt{-1})=\varphi(y,z)+\sqrt{-1}\,\psi(y,z)$

donc $f(a)=f(b+c\sqrt{-1})=\varphi(b,c)+\sqrt{-1}\,\psi(b,c)$

Je pose

$$f(a) = \varphi(b,c) + \sqrt{-1}\,\psi(b,c) = R(\cos T' + \sqrt{-1}\sin T')$$

de même

$$\frac{f'(a)}{1} = R_1(\cos T'_1 + \sqrt{-1}\sin T'_1)$$

$$\frac{f''(a)}{1.2} = R_2(\cos T'_2 + \sqrt{-1}\sin T'_2) \quad \ldots\ldots$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} = R_n(\cos T'_n + \sqrt{-1}\sin T'_n).$$

De la 1re de ces éq. on tire

$$R^2 = \varphi(b,c)^2 + \psi(b,c)^2.$$

Cette valeur est celle de u qui correspond au minimum. Ainsi pour démontrer le théorème il suffit de faire voir que $R=0$.

Supposons que le 1er ~~terme~~ des termes $\frac{f'(a)}{1}$, $\frac{f''(a)}{1.2}$ &c qui n'est pas nul soit $\frac{f^{n}(a)}{1.2\ldots n}$ nous aurons

$$f(x) = R(\cos T' + \sqrt{-1}\sin T') + R_n z^n\left(\cos(T'_n + nt) + \sqrt{-1}\sin(T'_n + nt)\right)$$
$$+ R_{(n+1)} z^{n+1}\left(\cos(T'_{(n+1)} + (n+1)t) + \sqrt{-1}\sin(T'_{(n+1)} + (n+1)t)\right) + \&c$$

Mais $f(x) = \varphi(y,z) + \sqrt{-1}\,\psi(y,z)$ donc

$$\varphi(y,z) = R\cos T' + R_n z^n \cos(T'_n + nt) + R_{(n+1)} z^{n+1}\cos(T'_{(n+1)} + (n+1)t) + \&c$$

$$\psi(y,z) = R\sin T' + R_n z^n \sin(T'_n + nt) + R_{(n+1)} z^{n+1}\sin(T'_{(n+1)} + (n+1)t) + \&c$$

Substitutant ces valeurs de l'éq.

$$u = \varphi(y,z)^2 + \psi(y,z)^2$$

$$u = R^2 + 2RR_n z^n\cos(T'_n - T' + nt) + R^2_n z^{2n} +$$
$$+ 2RR_{(n+1)} z^{n+1}\cos(T'_{n+1} - T' + (n+1)t) + \&c.$$

Or si M est le point minimum on aura $AR = a$, $PR = b$ et prenant $RR' = h$, $P'Q = k$ on aura

$$t = \text{arc tang} \frac{k}{h} \quad \text{d'où} \quad \frac{k}{h} = \text{tang}\, t.$$

par cons.t l'angle $P'PQ$ est égal à l'angle t. Comme on peut faire varier cet angle indéfiniment en prenant différents points autour du point M, on pourra rendre à volonté la quantité $\mathcal{E}n - \mathcal{E} + nt$ plus grande ou plus petite que $100°$; on fera donc par changer le signe de $\cos(\mathcal{E}n - \mathcal{E} + nt)$ et par cons.t aussi celui du 2.d terme. Mais on peut prendre z assez petit pour que ce 2.d terme soit plus grand que la somme de tous les autres, car l'exposant n est le plus petit des exposants de z en sorte que lorsqu'on a supprimé $R z^2$ le polynome est de la forme

$$Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + \&c$$

Posant $Az^n > Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + \sim$ ou bien

$$A > Bz + Cz^2 + \ldots$$

Il est évident que cette condition peut être satisfaite car A est constant et qu'en faisant diminuer z on peut faire diminuer le 2.d membre indéfiniment.

Ainsi lorsqu'on aura mis à la place de z une quantité assez petite on pourra faire varier à volonté le signe de la somme des termes qui

suivent le 1r, on pourrait donc avoir à volonté pour u une valeur plus grande ou plus petite que R^2 à moins que $R=0$.* Mais u doit être toujs plus grand que R^2; il faut-donc que $R=0$ c.q.f.d.

* Comme il y a un minimum au point $x=a$ $y=b$ $z=c$ on a $\varphi(y,z)^2+\psi(y,z)^2 > \varphi(b,c)^2+\psi(b,c)^2$ ou bien $u > R^2$.

D'après cela le polynome aura un facteur de la forme $x-a-b\sqrt{-1}$ et par suite aussi il en aura un de la forme $x-a+b\sqrt{-1}$. Il sera donc divisible par le facteur du 2d degré $(x-a)^2+b^2$. Effectuant la division on aura encore un polynome qui sera divisible par un facteur de même forme. Ainsi de suite. Par const un polynome d'un degré quelconque en x peut en général se mettre sous la forme

$$f(x) = (x-a)(x-a_1)\ldots\{(x-b)^2+c^2\}\{(x-b_1)^2+c_1^2\}\ldots$$

D'après cela si sur une ligne indéfinie on prend à partir d'un point fixe A, $AM=x$ $AO=a$ $AO_1=a_1$ $AO_2=a_2$ &c et $AP=b$ $PN=PN'=c$ on aura

$$OM=x-a \quad O_1M=x-a_1 \quad O_2M=x-a_2$$

$$PM=x-b \quad MN=MN'=\sqrt{(x-b)^2+c^2}.$$

On trouvera

$$f(x)=OM\cdot O_1M\cdot O_2M\ldots MN\cdot MN'\cdot MN_1\cdot MN_1'\ldots$$

On voit qu'en posant $AM=AO$ on réduira le polynome à zéro; tandis qu'on ne pourra trouver aucune valeur pour AP qui donne $MN=0$ et qui réduise le polynome à zéro.

O_2 A O_1 O P_1 P M N_1 N N_1' N'

Reprenons maintenant l'intégration des fractions rationnelles. Soit $\frac{v}{V}$ la fraction proposée supposons que le dénominateur ait des racines imaginaires, mais qu'il n'ait pas de racines imaginaires égales qu'on ait par ex

$$\frac{v}{V} = \frac{A}{x-a-b\sqrt{-1}} + \frac{B}{x-a+b\sqrt{-1}} + \frac{A_1}{x-a_1-b_1\sqrt{-1}} + \frac{B_1}{x-a_1+b_1\sqrt{-1}} + \text{etc}$$

Pour déterminer les numérateurs par la série de Maclaurin il faut former l'expression $\frac{v}{V'}$. Pour avoir la valeur de A on remplacera dans cette expression x par $a+b\sqrt{-1}$, pour la valeur de B on remplacera x par $a-b\sqrt{-1}$. Si la valeur de A est $M+N\sqrt{-1}$ celle de B sera $M-N\sqrt{-1}$. On aurait donc

$$\int \frac{v}{V} dx = (M+N\sqrt{-1})\int \frac{dx}{x-a-b\sqrt{-1}} + (M-N\sqrt{-1})\int \frac{dx}{x-a+b\sqrt{-1}} + \text{etc}$$

Mais au lieu d'intégrer chaque terme séparément, il vaut mieux intégrer la somme des deux termes qui ne diffèrent que par le signe de N. On aura

$$\int\left(\frac{m+n\sqrt{-1}}{x-a-b\sqrt{-1}} + \frac{m-n\sqrt{-1}}{x-a+b\sqrt{-1}}\right)dx = \int \frac{2m(x-a)-2bn}{(x-a)^2+b^2}dx$$

$$= m\int \frac{2(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} - 2n\int \frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2}.$$

$$= m\,l\left((x-a)^2+b^2\right) - 2n\int \frac{\frac{dx}{b}}{\frac{(x-a)^2}{b^2}+1}$$

$$= m\,l\left((x-a)^2+b^2\right) - 2n \operatorname{arc\,tang} \frac{x-a}{b} + c.$$

Si le dénominateur admet des racines imaginaires égales, on aura en effectuant la décomposition.

$$\frac{U}{V} = \frac{A}{(x-a-b\sqrt{-1})^n} + \frac{A_1}{(x-a-b\sqrt{-1})^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a-b\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{B}{(x-a+b\sqrt{-1})^n} + \frac{B_1}{(x-a+b\sqrt{-1})^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{x-a+b\sqrt{-1}} + \&c.$$

Pour trouver les numérateurs, il faut former les expressions ~~$\frac{V^{(n)}}{1\ldots n} = U$, $\frac{V^{(n+1)}}{1.2\ldots(n+1)} = U'$ …~~

$$\frac{(1\ldots n)\,U}{V^{(n)}}, \quad \frac{(1\ldots(n+1))\,U'}{V^{(n+1)}}, \quad \frac{(1\ldots(n+2))\,\frac{U''}{2}}{V^{(n+2)}} \ldots$$

$$\frac{V^{(n)}}{1.2\ldots n} A = u$$

$$\frac{V^{(n+1)}}{1.2\ldots(n+1)} A + \frac{V^{(n)}}{1.2\ldots n} A_1 = \frac{u'}{1}$$

Remplaçant dans ces expressions x par $a+b\sqrt{-1}$ la 1re donnera la valeur de A, la 2de celle de A_1 &c. si on met ensuite à la place de x $a-b\sqrt{-1}$, ces expressions donneront les valeurs de B, B_1 &c. D'après cela si on a

$$A = m+n\sqrt{-1} \quad A_1 = m_1+n_1\sqrt{-1} \quad A_2 = m_2+n_2\sqrt{-1}\ldots$$

on aura pour les valeurs de B

$$B = m-n\sqrt{-1} \quad B_1 = m_1-n_1\sqrt{-1} \quad B_2 = m_2-n_2\sqrt{-1}\ldots$$

Dans ce cas pour parvenir à un résultat simple, il faut intégrer chaque terme séparément et faire ensuite la somme des intégrales des termes conjugués. Ainsi on aura par ex.

$$\int \frac{m+n\sqrt{-1}}{(x-a-b\sqrt{-1})^n} + \int \frac{m-n\sqrt{-1}}{(x-a+b\sqrt{-1})^n} =$$

$$-\left(\frac{m+n\sqrt{-1}}{(n-1)(x-a-b\sqrt{-1})^{n-1}} + \frac{m-n\sqrt{-1}}{(n-1)(x-a+b\sqrt{-1})^{n-1}}\right)$$

En faisant la somme de ces deux termes, le résultat sera de la forme

$$-\frac{1}{n-1}\,\frac{(m+n\sqrt{-1})(X+Y\sqrt{-1}) + (m-n\sqrt{-1})(X-Y\sqrt{-1})}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}}.$$

Si on veut intégrer une fraction dans laquelle les deux termes ne contiennent que des monomes élevés à des exposants fractionnaires, on ramène l'intégration ~~à celle d'une~~ de cette fraction à celle d'une autre ds laquelle tous les exposants sont entiers. Soit par ex. la fraction

$$\frac{z^{\frac{m}{n}} - b z^{\frac{p}{n}}}{a - c z^{\frac{q}{r}} + z^{t}} dz.$$

On pose $\sqrt[nr]{z} = x$ d'où $z = x^{nr}$. on aura

$$\int \frac{z^{\frac{m}{n}} - b z^{\frac{p}{n}}}{a - c z^{\frac{q}{r}} + z^{t}} dz = \int \frac{x^{mr} - b x^{pr}}{a - c x^{qn} + x^{nrt}}\, nr\, x^{nr-1} dx.$$

Passons à l'intégration des radicaux de la forme

$$\sqrt{mx^2 + nx + p}$$

On met cette expression sous la forme

$$\sqrt{m}\sqrt{x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}}$$

posant $\frac{n}{m} = 2a$, $\frac{p}{m} = b$ on aura

$$\sqrt{m}\sqrt{x^2 + 2ax + b}$$

Si m est négatif on aura

$$\sqrt{-mx^2 + nx + b} = \sqrt{m}\sqrt{-x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{b}{m}}$$

$$= \sqrt{m}\sqrt{-x^2 + 2ax + b}.$$

Ainsi l'intégration d'un radical de la forme $\sqrt{mx^2 + nx + p}$ se réduit à celle des radicaux

$$\sqrt{b + 2ax + x^2} \text{ et } \sqrt{b + 2ax - x^2}.$$

Considérons d'abord la 1re de ces deux expressions.

On pose $\sqrt{b+2ax+x^2} = z-x$

d'où $b+2ax = z^2-2zx$

on tire de là $x = \frac{1}{2}\frac{z^2-b}{a+z}$ et par suite

$\sqrt{b+2ax+x^2} = z - \frac{1}{2}\frac{z^2-b}{a+z} = \frac{1}{2}\frac{z^2+2az+b}{a+z}.$

On obtient par cette transformation une expression dont le numérateur se compose en z comme la quantité qui est sous le signe radical se compose en x. En différentiant on aura

$$dx = \frac{1}{2}\frac{2(a+z)\,z\,dz-(z^2-b)dz}{(a+z)^2}$$

$$dx = \frac{1}{2}\frac{b+2az+z^2}{(a+z)^2}dz$$

D'après cela supposons qu'on veuille intégrer l'expression $dx\,F(x, \sqrt{b+2ax+x^2})$ on aura

$$\int dx\,F(x, \sqrt{b+2ax+x^2}) = \frac{1}{2}\int\frac{b+2az+z^2}{(a+z)^2}dz\,F\left(\frac{1}{2}\frac{z^2-b}{a+z}, \frac{1}{2}\frac{b+2az+z^2}{a+z}\right)$$

On peut remarquer qu'il existe une relation très simple entre le radical et la valeur de z. Car si on divise dx par le radical on trouve

$$\frac{dx}{\sqrt{b+2ax+x^2}} = \frac{dz}{a+z}.$$

On peut parvenir à ce résultat en différentiant l'éq. qui donne la valeur de x

$$2(a+z)x = z^2-b$$

on trouve $(a+z)dx = (z-x)dz$

Or $z-x = \sqrt{b+2ax+x^2}$ donc

$$\frac{dx}{\sqrt{b+2ax+x^2}} = \frac{dz}{a+z}.$$

Passons maintenant au 2^d radical $\sqrt{b+2ax-x^2}$ soient h et g les deux racines de l'équation $x^2-2ax-b=0$ nous aurons

$$\sqrt{b+2ax-x^2} = \sqrt{(h-x)(x-g)}$$

Posons

$$\sqrt{(h-x)(x-g)} = (h-x)z \quad \text{d'où} \quad z=\sqrt{\frac{x-g}{h-x}}$$

Elevant au carré nous aurons

$$x-g = (h-x)z^2 \qquad \text{d'où}$$

$$x=\frac{hz^2+g}{z^2+1} \qquad h-x = \frac{h-g}{z^2+1}.$$

Par const.

$$\sqrt{(h-x)(x-g)} = \frac{(h-g)z}{z^2+1}.$$

Différentiant la valeur d'x on aura

$$dx=\frac{2(z^2+1)hzdz-2(hz^2+g)zdz}{(z^2+1)^2} = \frac{2z(h-g)}{(z^2+1)^2}dz.$$

Nous aurons donc

$$\int dx\, F(x,\sqrt{b+2ax-x^2}) = \int\frac{2z(h-g)}{(z^2+1)^2}dz\, F\left(x, \frac{(h-g)z}{z^2+1}\right)$$

On trouve aussi ds ce cas

$$\frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}} = \frac{2dz}{z^2+1}$$

On parviendrait également à cette éq. en différentiant la valeur d'x, on trouve alors

$$dx = 2(h-x)zdz - z^2dx$$

$$dx(z^2+1) = 2(h-x)zdz.$$

$$\frac{dx}{(h-x)z} = \frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}} = \frac{2dz}{z^2+1}.$$

D'après cela pour intégrer $\frac{dx}{\sqrt{b+2ax+x^2}}$ on aura en posant $\sqrt{b+2ax+x^2} = z-x$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b+2ax+x^2}} = \int \frac{dz}{a+z} + C = l(a+z) + C =$$

$$l(a+x+\sqrt{b+2ax+x^2}) + C.$$

S'il n'y avait pas de 2d terme il faudrait faire $a=0$ et on aurait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b+x^2}} = l(x+\sqrt{b+x^2}) + C.$$

Si on veut intégrer $\frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}}$ on aura en posant

$\sqrt{b+2ax-x^2} = (h-x)z$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}} = 2\int \frac{dz}{z^2+1} = 2\,\text{arc tang}\, z + C =$$

$$2\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{x-g}{h-x}} + C.$$

Cette intégrale n'est réelle que lorsque x est compris entre g et h. On pouvait le prévoir puisque cette condition est nécessaire pour que l'expression proposée soit réelle.

L'expression que nous venons de trouver peut se mettre sous une autre forme indépendante de h et de g. En effet nous avons

$$2\,\text{arc tang}\, z = \text{arc tang}\,\frac{2z}{1-z^2}. \quad \text{Donc}$$

$$2\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{x-g}{h-x}} = \text{arc tang}\,\frac{2\sqrt{\frac{x-g}{h-x}}}{1-\frac{x-g}{h-x}} =$$

$$\text{arc tang}\,\frac{2\sqrt{(x-g)(h-x)}}{h-2x+g} = \text{arc tang}\,\frac{\sqrt{b+2ax-x^2}}{a-x}.$$

Mais lorsque $\text{tang}\,\gamma = t$ on a $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} =$

par const.

$$\operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{b+2ax-x^2}}{a-x} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b+2ax-x^2}{(a-x)^2}}}$$

$$= \arccos \frac{a-x}{\sqrt{a^2+b}}$$

Donc enfin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}} = \arccos \frac{a-x}{\sqrt{b+a^2}} + C.$$

On peut parvenir au même résultat d'une autre manière. Posons

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b+a^2-(a-x)^2}} = \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{b+a^2}}}{\sqrt{1-\frac{(a-x)^2}{b+a^2}}}$$

Soit $u = \frac{a-x}{\sqrt{b+a^2}}$ d'où $du = -\frac{dx}{\sqrt{b+a^2}}$.

d'où $\int \frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u + C.$

Donc enfin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b+2ax-x^2}} = \arccos \frac{a-x}{\sqrt{b+a^2}} + C.$$

Si dans cette formule on fait $a=0$ on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b-x^2}} = \arccos -\frac{x}{\sqrt{b}} + C.$$

Proposons nous pour ex. de trouver l'intégrale de $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. Posons

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x)z \quad \text{d'où} \quad 1+x = (1-x)z^2 \quad z = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Nous aurons

$$x(1+z^2) = z^2-1 \quad x = \frac{z^2-1}{z^2+1}$$

Mais la formule que nous avons déjà trouvée donne $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2dz}{z^2+1}$ Donc

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\,dz\,(z^2+1)}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{2\,dz}{z^2-1}.$$

Or $\frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$. Donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dz}{z-1} - \int \frac{dz}{z+1} = l(z-1) - l(z+1)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\,\frac{z-1}{z+1} = l\,\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1} = l\,\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{2x}$$

Donc enfin

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

On peut avoir à intégrer des expressions de la forme

$$F(x, \sqrt{a+x}, \sqrt{b-x})\,dx$$

On pose alors

$$\sqrt{b-x} = u \quad \text{d'où} \quad x = b-u^2 \quad dx = -2u\,du$$

$$a+x = a+b-u^2$$

Et l'expression précédente se réduit à

$$\int F(b-u^2, \sqrt{a+b-u^2}, u).$$

~~On trouve par cette méthode~~

($\int dx \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}}$ ~~$= C - \sqrt{b-x}\sqrt{a+x} - (a+b)\,\text{arc sin}\,\frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{a+b}}$~~)

cette intégrale s'obtient en multipliant haut et bas par $\sqrt{a+x}$

p^r trouver cette intégrale voy. P. 236. 6.

Intégration des différentielles

Binomes

Supposons qu'on veuille intégrer une expression de la forme

$$dz\left(a z^{\frac{r}{s}} + b z^{\frac{t}{u}}\right)^{\frac{p}{q}}$$

on pose $\sqrt[suq]{z} = x \quad z = x^{suq}$ et on aura

$$dz = suq\, x^{suq-1}\, dx.$$

$$\int\left(az^{\frac{z}{s}}+bz^{\frac{t}{u}}\right)^{\frac{p}{q}}dz = suq\int x^{suq-1}dx\left(ax^{qru}+bx^{qst}\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$= qsu\int x^{suq+pru-1}dx\left(a+bx^{qst-qru}\right)^{\frac{p}{q}} \quad (A)$$

$$= qsu\int x^{suq+pst-1}dx\left(ax^{qru-qst}+b\right)^{\frac{p}{q}} \quad (B)$$

Si $qst > qru$ on prendra l'expression (A) si $qst < qru$ on prendra l'expression (B) ~~aussi~~

Ainsi l'intégration de la fonction proposée peut toujours se ramener à l'intégration d'une expression de la forme

$$x^{m-1}dx\left(a+bx^n\right)^{\frac{p}{q}} \quad (M)$$

Pour obtenir l'intégrale de cette expression on pose

$$\left(a+bx^n\right)^{\frac{p}{q}} = z^p \text{ d'où } a+bx^n = z^q$$

$$x^n = \frac{z^q-a}{b} \qquad x = \frac{(z^q-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \qquad x^m = \frac{(z^q-a)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

$$m x^{m-1}dx = \frac{\frac{m}{n}(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot q z^{q-1}dz}{b^{\frac{m}{n}}}$$

$$x^{m-1}dx = \frac{q(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot z^{q-1}dz}{nb^{\frac{m}{n}}}$$

On aura donc

$$(N) \int x^{m-1}dx\left(a+bx^n\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}}\int (z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot z^{p+q-1}dz.$$

Lorsque $\frac{m}{n}$ est entier et positif ~~= 1~~ cette intégrale est facile à obtenir. ~~Nous donnerons bientôt le moyen de la trouver lorsque $\frac{m}{n}$ n'est pas égal entier à l'unité.~~ (*)

(*) L'expression (M) peut se mettre sous la forme

$$x^{m+\frac{np}{q}-1}dx\left(ax^{-n}+b\right)^{\frac{p}{q}}.$$

pour trouver l'intégrale de cette expression il faut remplacer ds la formule (N) m par $m+\frac{np}{q}$ &c. Ainsi, l'exposant du binome qui est ds la formule $\frac{m}{n}-1$ sera $\frac{m+\frac{np}{q}}{n}-1$ pour qu'on puisse intégrer il faut que $\frac{m+\frac{np}{q}}{n} = \frac{mq+np}{nq}$ ou bien $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ soit un nombre entier et positif. On pourra donc intégrer lorsque $\frac{m}{n}$ ou $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ sera un nombre entier et positif.

Soit par ex. $\int x^3 dx (a^2+x^2)^{\frac{2}{3}}$
faisant dans la formule précédente
$m=4 \quad a=a^2 \quad b=1 \quad n=2 \quad p=2 \quad q=3$
on aura
$$\int x^3 dx (a^2+x^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\int (z^3-a^2) z^4 dz.$$
$$= \frac{3}{2}\int z^7 dz - \frac{3}{2}a^2 \int z^4 dz.$$
Calculant cette intégrale et mettant à la place de z sa valeur qui est ici $z=\sqrt[3]{a^2+x^2}$ on aura l'intégrale cherchée.

Si on veut intégrer une expression de la forme $dx(\sqrt{b+2ax\pm x^2})^{2m+1}$ on pose
$$dx(\sqrt{b+2ax\pm x^2})^{2m+1} = dx(b+2ax\pm x^2)^m \sqrt{b+2ax\pm x^2}$$
expression que nous savons intégrer.

Si on a une expression de la forme
$$\frac{X+Y\sqrt{b+2ax\pm x^2}}{X_1+Y_1\sqrt{b+2ax\pm x^2}}$$
On multiplie les deux termes par
$$X_1 - Y_1\sqrt{b+2ax\pm x^2}.$$
et on aura une expression de la forme
$$dx(P+Q\sqrt{b+2ax\pm x^2}).$$

Passons maintenant au cas général, de l'intégration des fonctions irrationnelles des binomes. Supposons qu'on ait l'expression
$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$$
dans laquelle p est fractionnaire ou négatif de même que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m}{n}+p$.

1°. Si m et n sont de signes contraires et p positif on aura en intégrant par parties.

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^p - \int \frac{x^m}{m} p(a+bx^n)^{p-1} bnx^{n-1}dx$$

(A) $$= \frac{x^m(a+bx^n)^p - bnp\int(a+bx^n)^{p-1}x^{m+n-1}dx}{m}$$

Ainsi on ramène l'intégrale de l'expression proposée à celle d'une autre intégrale dans laquelle les exposants de x et du binome sont rapprochés de zéro.

2°. Si m et n sont de mêmes signes et p négatif on posera

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{1}{(p+1)bn} x^{m-n}(p+1)(a+bx^n)^p bnx^{n-1}dx$$

d'où

(B) $$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)bn}.$$

Par ce moyen on abaisse les exposants de x et du binome.

3° Si m et n sont de mêmes signes et p positif, remplaçant dans la formule précédente $(a+bx^n)^{p+1}$ par $(a+bx^n)^p(a+bx^n) = a(a+bx^n)^p + bx^n(a+bx^n)^p$ on aura

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$$

$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)bn} - \frac{(m-n)a}{(p+1)bn}\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p - \frac{m-n}{np+n}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$$

d'où $$\left(1+\frac{m-n}{np+n}\right)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n)a\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{(p+1)bn}$$

Enfin en divisant par $1+\frac{m-n}{np+n} = \frac{np+m}{np+n}$

$$(M)\ \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n)a\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{b(np+m)}$$

Au moyen de cette formule on abaisse l'exposant de x sans changer celui du binome. Il faut à celle-ci en joindre une autre qui abaisse l'exposant du binome sans changer celui de x. Pour trouver cette 2de formule je mets l'éq. (A) sous la forme

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$$

$$\frac{x^m(a+bx^n)^p - np\int(a+bx^n)^{p-1}dx : x^{m-1}(a+bx^n-a)}{m} =$$

$$\frac{x^m(a+bx^n)^p - np\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p + anp\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{m}$$

d'où $\quad \frac{m+np}{m}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$

$$\frac{x^m(a+bx^n)^p + anp\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{m}.$$

et enfin

$$(N)\ \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p + anp\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{m+np}.$$

Cette formule sert à abaisser l'exposant du binome sans changer celui de x.

4°. Si m et n sont de signes contraires p négatif on remplace dans la formule (M) m par $m+n$ ce qui donne

$$b(np+m+n)\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^p = x^m(a+bx^n)^{p+1} - am\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p.$$

d'où on tire

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1} - b(np+m+n)\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^p}{am}$$

Cette formule sert à abaisser l'exposant d'x

sans changer celui du binome. Si ds la formule (N) on remplace p par $p+1$ on aura

$$(m+n+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p+1} = x^m(a+bx^n)^{p+1} + a(np+n)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p.$$

d'où on tire

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{(m+n+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p+1} - x^m(a+bx^n)^{p+1}}{a(np+n)}$$

Au moyen de cette formule on abaisse l'exposant du binome sans changer celui de x. (V. P. 236. 6.)

Intégration des exponentielles.

Proposons nous d'intégrer l'expression

$$P a^x dx$$

ds laquelle P est une fonction d'x, nous aurons en intégrant par parties.

$$\int P a^x dx = \frac{P a^x}{la} - \frac{1}{la}\int \frac{dP}{dx} a^x dx.$$

On trouvera de même

$$\int \frac{dP}{dx} a^x dx = \frac{1}{la}\frac{dP}{dx}a^x - \frac{1}{la}\int \frac{d^2P}{dx^2} a^x dx.$$

$$\int \frac{d^2P}{dx^2} a^x dx = \frac{1}{la}\frac{d^2P}{dx^2}a^x - \frac{1}{la}\int \frac{d^3P}{dx^3} a^x dx. \ \&c.$$

et par cons^t

$$\int P a^x dx = \frac{P a^x}{la} - \frac{1}{la^2}\frac{dP}{dx}a^x + \frac{1}{la^3}\frac{d^2P}{dx^2}a^x - \&c.$$

Ou bien

$$\int P a^x dx = \frac{a^x}{la}\left(P - \frac{1}{la}\frac{dP}{dx} + \frac{1}{la^2}\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{1}{la^3}\frac{d^3P}{dx^3} + \&c\right)$$

si on pose $a = e$ on aura

$$\int P e^x dx = e^x\left(P - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^3P}{dx^3} + \&c \ldots\right)$$

Toutes les fois que P sera une fonction entière et rationnelle de x cette série sera limitée,

Si par ex. on veut trouver l'intégrale de

$$(6x^2-2x+4)\,e^x dx$$

on aura $\frac{dP}{dx}=12x-2$ $\frac{d^2P}{dx^2}=12$ $\frac{d^3P}{dx^3}=0$ donc

$$\int(6x^2-2x+4)\,e^x dx = e^x(6x^2-14x+18)+C.$$

Si $P=x^m$ la série ~~devient~~ est limitée elle devient

$$\int x^m a^x dx = \frac{a^x}{la}\left(x^m - \frac{mx^{m-1}}{la} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{la^2} - \text{\&c}\right)+C.$$

Si on fait $a=e$, on aura

$$\int x^m e^x dx = e^x\left(x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \text{\&c}\right)+C$$

Si on voulait avoir l'intégrale de $x^m e^{nx} dx$ on poserait $e^n=a$ d'où $n=la$ et par suite,

$$\int x^m e^{nx} dx = \frac{e^{nx}}{n}\left(x^m - \frac{mx^{m-1}}{n} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{n^2} - \text{\&c}\right)+C$$

Si on voulait intégrer l'expression

$$Pa^{-x}dx$$

on aurait en posant $x=-z$ et représentant par P' ce que devient P lorsqu'on fait la substitution on aura

$$\int Pa^{-x}dx = -\int P'a^z dz$$

expression que nous savons trouver.

Mais si P était égal à x^{-n} alors les exposants de la série iraient tous en décroissant et la série ne se terminerait pas. Il faut donc intégrer d'une autre manière. Intégrant par parties nous aurons

$$\int x^{-n}a^x dx = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}$$

L'exposant d'x s'est ainsi approché de zéro.

on parviendra donc en continuant à une expression de la forme $\int \frac{a^x dx}{x}$ qui est égale à $a^x lx - la \int lx\, a^x dx$.

Nous ne savons pas trouver l'intégrale de $lx\, a^x dx$. Pour y suppléer on construit des tables qui donnent la valeur de $\int \frac{e^z dz}{z}$

Supposons que les tables donnent

$$\int \frac{e^z dz}{z} = \varphi(z) + C$$

Pour trouver $\int \frac{a^x dx}{x}$ on pose

$$a^x = e^z \text{ d'où } a^x la\, dx = e^z dz \qquad z = x\, la$$

et par suite $\frac{a^x dx}{x} = \frac{e^z dz}{z}$

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \int \frac{e^z dz}{z} = \varphi(z) + C = \varphi(x\, la) + C.$$

Lorsqu'on veut trouver l'intégrale de $P dx\, f(x)^n$ si $f'(x) dx$ est une fonction algébrique on peut employer avec avantage l'intégration par partie pour abaisser l'exposant de $f(x)$. Car on a alors

$$\int P dx\, f(x)^n = f(x)^n \int P dx - n \int f(x)^{n-1} f'(x) dx \int P dx.$$

Si on sait trouver $\int P dx$ on aura ramené l'intégrale proposée à celle d'une fonction dans laquelle l'exposant de $f(x)$ est diminué d'une unité.

Or les fonctions logarithmiques et circulaires

sont telles que leurs dérivées du 1^r ordre sont algébriques et en effet nous avons trouvé

$$d\,lx = \frac{dx}{x} \qquad d\,\mathrm{arc\,sin}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d\,\mathrm{arc\,tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{\&c}$$

On pourra donc leur appliquer l'intégration par parties.

Ainsi voulant trouver l'intégrale de $dx\,lx$ on aura

$$\int dx\,lx = x\,lx - \int x\frac{dx}{x} = x(lx-1)+C.$$

Pour l'intégrale de $dx(\mathrm{arc\,sin}\,x)$ on aura en posant dans la formule générale $dx = dv$, $u = \mathrm{arc\,sin}\,x$.

$$\int dx(\mathrm{arc\,sin}\,x) = x\,\mathrm{arc\,sin}\,x - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{Or}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C \quad \text{Donc}$$

$$\int dx\,\mathrm{arc\,sin}\,x = x\,\mathrm{arc\,sin}\,x + \sqrt{1-x^2}+C.$$

On aurait de même

$$\int dx\,\mathrm{arc\,tang}\,x = x\,\mathrm{arc\,tang}\,x - \int\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

or $\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} = l(1+x^2)+C$ Donc

$$\int dx\,\mathrm{arc\,tang}\,x = x\,\mathrm{arc\,tang}\,x - \tfrac{1}{2}l(1+x^2)+C.$$

Si la fonction logarithmique ou circulaire était élevée à une certaine puissance on trouverait de même l'intégrale.

Proposons nous par ex. de trouver l'intégrale de $dx\,lx^2$. Nous aurons en ~~différentiant~~ intégrant par parties

$$\int dx\,lx^2 = x\,lx^2 - 2\int x\frac{dx\,lx}{x} = x\,lx^2 - 2\int lx\,dx$$

Mais $\int dx\,lx = x(lx-1)+C$ Donc

$$\int dx\,lx^2 = x\,lx^2 - 2x\,lx + 2x + C.$$

Nous trouverons de même :

$$\int x dx (\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{2}(\arcsin x)^2 - \int \frac{x^2}{2} 2 \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On intègre le dernier terme par parties ce qui donne

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x = \sqrt{1-x^2}.x.\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx + \int x dx.$$

Or $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ Donc

Pour trouver la 1re intégrale du 2d membre on la met sous la forme

$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = \int \frac{(1-x^2)\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Posant dans la formule générale

$$u = 1-x^2 \qquad dv = \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{d'où}$$

$$du = -2x dx \qquad v = \frac{(\arcsin x)^2}{2}$$

On aura

$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2(1-x^2) + \int (\arcsin x)^2 x dx.$$

Nous aurons donc en substituant

$$\int x dx (\arcsin x)^2 =$$

$$\frac{x^2}{2}(\arcsin x)^2 + x\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(1-x^2)(\arcsin x)^2 - \int (\arcsin x)^2 x dx$$

d'où on tire

$$\int (\arcsin x)^2 x dx =$$

$$\frac{x^2}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(1-x^2)(\arcsin x)^2.$$

Ou bien enfin

$$\int (\arcsin x)^2 x dx =$$

$$\frac{x^2}{2}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + C.$$

Soit proposé de trouver

$$\int x^m lx^n dx$$

posons

$$dv = x^m dx \qquad u = lx^n \quad \text{d'où}$$

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad du = n\,lx^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

nous aurons

$$\int x^m lx^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} lx^n - \frac{n}{m+1}\int x^{m+1} lx^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} lx^n - \frac{n}{m+1}\int x^m lx^{n-1} dx.$$

On a donc abaissé l'exposant de lx sans changer celui de x. En continuant de même on trouvera

$$\int x^m lx^{n-1} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} lx^{n-1} - \frac{n-1}{m+1}\int x^{m+1} lx^{n-2}\frac{dx}{x}$$

ainsi de suite on parviendra enfin au terme

$$\int x^m lx\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\frac{dx}{x}.$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \frac{1}{m+1}\int x^m dx.$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

Substituant les valeurs des intégrales que nous venons de trouver on aura ~~pr~~ la valeur de $\int x^m lx^n dx$. Dans ce calcul on suppose que n est positif.

Si l'exposant du log. était négatif on passerait

$$\int \frac{x^m dx}{lx^n} = \int x^{m+1}\frac{dx}{x\,lx^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)lx^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int\frac{x^m dx}{lx^{n-1}}.$$

On abaisse ainsi d'une unité l'exposant de lx. En continuant de même on parviendra à $\int \frac{x^m dx}{lx}$. Pour trouver cette intégrale on se sert des tables qui donnent l'intégrale de $\frac{e^z dz}{z}$. Posant

$$x^{m+1} = e^z \quad \text{d'où} \quad (m+1)x^m dx = e^z dz$$

$$z = l(x^{m+1}) = (m+1)lx.$$

$$\frac{e^z dz}{z} = \frac{(m+1)x^m dx}{(m+1)lx} = \frac{x^m dx}{lx}$$

nous aurons

$$\int\frac{x^m dx}{lx} = \int\frac{e^z dz}{z} = \varphi(z) = \varphi((m+1)lx) + C.$$

Soit à intégrer l'expression $dx(\arcsin x)^n$.

Nous aurons

$$\int dx(\arcsin x)^n = x(\arcsin x)^n - n\int x(\arcsin x)^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'exposant de arc sin x est diminué d'une unité. Mais on a

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x)^{n-1} = -\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1} + (n-1)\int(\arcsin x)^{n-2}dx$$

En continuant de même on abaissera l'exposant n et s'il est positif la série sera limitée. On aura

$$\int dx(\arcsin x)^n = x\{(\arcsin x)^n - n(n-1)(\arcsin x)^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)(\arcsin x)^{n-4} + \dots\} +$$

$$\sqrt{1-x^2}\{n(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\arcsin x)^{n-3} + \dots\}$$

Intégration des fonctions circulaires.

Nous avons déjà trouvé

$d\sin x = \cos x\,dx \qquad d\cos x = -\sin x\,dx$

$d\,\text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

$d\,\text{séc}\,x = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} \qquad d\,\text{coséc}.x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$

Nous aurons donc réciproquement

$\int \cos x\,dx = \sin x + C \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\,x + C \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \text{séc}.x + C \quad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\text{coséc}.x + C,$

Proposons nous maintenant de trouver

$\int \text{tang}\,x\,dx$, $\int \cot x\,dx$, $\int \text{séc}\,x\,dx$, $\int \text{coséc}\,x\,dx$

Nous aurons d'abord

$$\int \text{tang}\,x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos.x} = C - l\cos x$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = l\sin x + C.$$

Pour trouver l'intégrale de séc. $x\,dx$. je remarque qu'on a

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}$$

Posons $\sin x = z$ d'où $\cos x\,dx = dz$.

$$\cos^2 x = 1 - z^2.$$

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{dz}{1-z^2}$$

Or on trouve

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\right)$$

z étant un sinus ~~ou cosinus~~ est plus petit que l'unité on changera donc le signe de la 2de fraction et on aura

$$\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{1-z}\right)dz = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+z}{1-z} + C.$$

Nous aurons donc

$$\int séc\, x\, dx = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

Mais nous avons la formule

$$1+\sin x : 1-\sin x = \tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) : \tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

Mais $\tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = 1$

Donc

$$1+\sin x : 1-\sin x = \tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) : 1.$$

$$\text{d'où} \quad \tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

Nous aurons donc.

$$\int séc.\, x\, dx = \frac{1}{2}\, l \tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = l \tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C.$$

Pour trouver la l'intégrale ~~différentielle~~ de la cosécante nous poserons

$$\int coséc.\, x\, dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx \sin x}{\sin^2 x} = -\int \frac{d \cos x}{1-\cos^2 x}.$$

Ainsi faisant $z = \cos x$ on aura

$$\int coséc.\, x\, dx = -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

Or de la formule précédente on tire

$1+\cos x : 1-\cos x = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) : \tan\frac{x}{2}$.

$1+\cos x : 1-\cos x = \cot\frac{x}{2} : \tan\frac{x}{2} = 1 : \tan^2\frac{x}{2}$.

d'où $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

Donc $\int \operatorname{coséc.} x\,dx = l.\tan\frac{x}{2} + C$.

Pour trouver l'intégrale de $\sin x \cos x\,dx$ on pose

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

On peut aussi poser

$$\int \sin x \cos x\,dx = -\int \cos x\,d\cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

Pour trouver l'intégrale de $\frac{dx}{\sin x \cos x}$ nous remarquerons que

$$d\tan x = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

et par suite

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d\tan x}{\tan x} = l\tan x + C.$$

Si on voulait intégrer $\sin ax\,dx$ on poserait

$$\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\,dax$$

et posant $ax = z$

$$\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin z\,dz = -\frac{1}{a}\cos z + C$$

Donc enfin

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

Proposons nous maintenant d'intégrer les expressions

$$\frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} \quad \sin^m x \cos^n x\,dx \quad \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}.$$

On pourrait encore donner $\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x}$ Mais

cette fonction rentre ds la 1re en remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$.

Soit d'abord la 1re expression. Je pose

$$\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x} = \int \frac{\sin^{m-1} x \sin x\, dx}{\cos^n x}$$

$$= -\int \frac{\sin^{m-1} x\, d\cos x}{\cos^n x}$$

Pour trouver cette intégrale, dans la formule

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

je pose

$$u = \sin^{m-1} x \qquad dv = \frac{d\cos x}{\cos^n x}$$

Or nous avons

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \quad \text{d'où} \int u^{-n} du = \frac{u^{1-n}}{1-n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$$

$$\text{donc} \quad \int \frac{d\cos x}{\cos^n x} = -\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}$$

Nous aurons donc

$$\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2} x\, dx}{\cos^{n-2} x}$$

Ainsi en intégrant une seule fois on a diminué les exposants du numérateur et du dénominateur.

Nous avons à examiner trois cas

$$n = m \qquad n > m \qquad n < m.$$

Si $n = m$ l'éq. précédente devient

$$\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^m x} = \frac{\sin^{m-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \int \frac{\sin^{m-2} x\, dx}{\cos^{m-2} x}$$

On écrit ordinairement

$$\int \tang^m x\,dx = \frac{\tang^{m-1} x}{m-1} - \int \tang^{m-2} x\,dx.$$

On aurait de même

$$\int \tang^{m-2} x\,dx = \frac{\tang^{m-3} x}{m-3} - \int \tang^{m-4} x\,dx$$

Ainsi de suite. On aura donc

$$\int \tang^m x\,dx = \frac{\tang^{m-1} x}{m-1} - \frac{\tang^{m-3} x}{m-3} + \frac{\tang^{m-5} x}{m-5} - \dots$$

$$\pm \frac{\tang^{m-2z+1} x}{m-2z+1} \mp \int \tang^{m-2z} x\,dx.$$

Si m est pair la série se terminera lorsque $m = 2z$ et les derniers termes seront

$$\dots\dots \pm \tang x \mp x + C.$$

Si m est impair on ne pourra pas aller jusqu'au terme pour lequel $z = \frac{m+1}{2}$ car alors $m-2z+1 = 0$ et ce terme serait infini. On s'arrêtera au terme précédent pour lequel $z = \frac{m+1}{2} - 1$ d'où $m-2z+1 = 2$. et les derniers termes seront

$$\dots \pm \tang^2 x \mp \int \tang x\,dx + C$$

ou bien

$$\dots \pm \tang^2 x \pm l \cos x + C.$$

Supposons maintenant $n < m$. La formule générale conduira à un terme de la forme

$$\frac{m-2z+1}{n-2z+1} \int \frac{\sin^{m-2z} x\,dx}{\cos^{n-2z} x}. \quad (A)$$

<u>n étant pair</u>, lorsque $z = \frac{n}{2}$ on a

$$(m-n+1) \int \sin^{m-n} x\,dx.$$

Pour intégrer ce terme posons $m-n = p$ et

nous aurons

$$\int \sin^p x\,dx = \int \sin^{p-1} x \sin x\,dx = -\sin^{p-1} x \cos x + (p-1)\int \sin^{p-2} x \cos^2 x\,dx.$$

$$= -\sin^{p-1} x \cos x + (p-1)\int \sin^{p-2} x\,dx - (p-1)\int \sin^p x\,dx.$$

$$\text{(B)}\quad \int \sin^p x\,dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos x}{p} + \frac{p-1}{p}\int \sin^{p-2} x\,dx.$$

~~Nous aurons donc en remplaçant p par $m-n$~~

~~$$(m-n+1)\int \sin^{m-n} x\,dx =$$~~

~~$$-\frac{m-n+1}{m-n}\sin^{m-n-1} x \cos x + \frac{m-n-1}{m-n}\int \sin^{m-n-2} x\,dx.$$~~

On voit que chaque opération abaisse de deux unités l'exposant de $\sin x$.

Si p est pair ~~m-n ou p sera aussi pair~~ ~~et~~ on parviendra à $\int dx = x$. Ainsi dans ce cas le dernier terme de la série sera

$$\ldots\ldots \pm x + C.$$

Si p est impair on arrivera à un terme $\int \sin x\,dx$, ainsi le dernier terme de la série sera

$$\ldots\ldots \pm \cos x + C.$$

n étant impair. On ira jusqu'à $z = \frac{n-1}{2}$ d'où $n - 2z = 1$ et le terme (A) deviendra

$$\frac{m-n+2}{2}\int \frac{\sin^{m-n+1} x\,dx}{\cos x}$$

Pour déterminer cette intégrale on pose $m-n+1 = p$ et on aura à chercher

$$\int \frac{\sin^p x\,dx}{\cos x}$$

On pose

$$\int \frac{\sin^p x\,dx}{\cos x} = \int \frac{\sin^{p-2} x\,(1-\cos^2 x)\,dx}{\cos x} =$$

$$\int \frac{\sin^{p-2} x\,dx}{\cos x} - \int \sin^{p-2} x \cos x\,dx = \int \frac{\sin^{p-2} x\,dx}{\cos x} - \frac{\sin^{p-1} x}{p-1}.$$

Donc enfin

$$\int \frac{\sin^p x\,dx}{\cos x} = -\frac{\sin^{p-1} x}{p-1} + \int \frac{\sin^{p-2} x\,dx}{\cos x}.$$

Si m est impair, $\&$ n est aussi impair $p = m-n+1$ sera impair, et on parviendra à $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$. Le dernier terme sera ds ce cas

$$\ldots\ldots \pm l\cos x + C.$$

Si m est pair, p sera aussi pair et on parviendra à un terme $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \text{séc.}\,x\,dx = l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Ainsi le dernier terme de la série sera

$$\ldots\ldots \pm l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Supposons enfin que $n > m$. On aura comme précédemment un terme

$$\frac{m-2r+1}{n-2r+1} \int \frac{\sin^{m-2r} x\,dx}{\cos^{n-2r} x}$$

Si m est impair on prendra $r = \frac{m-1}{2}$ d'où $2r = m-1$ et on aura

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^{n-m+1} x}.$$

Or $\int \frac{du}{u^{n-m+1}} = -\frac{1}{(n-m)u^{n-m}}$

le dernier terme sera donc

$$\ldots\ldots \pm \frac{1}{(n-m)\cos^{n-m} x} + C.$$

Si m est pair on parviendra au terme

$$\frac{1}{n-m+1}\int\frac{dx}{\cos^{n-m}x}$$

Ainsi, en posant $n-m=p$ il faudra intégrer $\frac{dx}{\cos^p x}$. On part pour cela de

$$\int\frac{dx}{\cos^{p-2}x}=\int\frac{\cos^2x\,dx}{\cos^p x}=\int\frac{(1-\sin^2x)\,dx}{\cos^p x}$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^p x}+\int\frac{\sin x\,d\cos x}{\cos^p x}$$

Donc enfin

$$\int\frac{dx}{\cos^{p-2}x}=\int\frac{dx}{\cos^p x}-\frac{\sin x}{(p-1)\cos^{p-1}x}+\frac{1}{p-1}\int\frac{dx}{\cos^{p-2}x}$$

D'où

$$\text{(E)}\quad\int\frac{dx}{\cos^p x}=\frac{\sin x}{(p-1)\cos^{p-1}x}+\frac{p-2}{p-1}\int\frac{dx}{\cos^{p-2}x}$$

Chaque intégrale abaisse de deux unités l'exposant de $\cos x$. On parviendra donc à un terme de la forme

$$\frac{p-2i}{p-2i+1}\int\frac{dx}{\cos^{p-2i}x}$$

Si n est pair, $\overline{co}$ m est aussi pair p qui est égal à $m-n$ sera pair. Alors lorsque $2i$ sera égal à $p-2$ le dernier terme sera

$$\ldots\ldots \pm \operatorname{tang} x + C.$$

Si n est impair p le sera aussi et lorsque $i=\frac{p-1}{2}$, le terme précédent devient $\int\frac{dx}{\cos x}$. On aura donc pour le dernier terme

$$\ldots\ldots \pm l\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$$

Si m est impair ; nous reprendrons le dernier terme

$$\frac{m-2z+1}{n-2z+1}\int\frac{\sin^{m-2z}x\,dx}{\cos^{n-2z}x}$$

Le terme qui précède celui-là sera, en supprimant le coefficient

$$\int\frac{\sin^{m-2z+2}x\,dx}{\cos^{n-2z+2}x}.$$

Faisant $m+1=2z$ ce terme devient

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^{n-m+1}x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos^{n-m+1}x}$$

On aura donc pour le dernier terme de la série

$$\ldots\ldots\pm\frac{1}{(n-m)\cos^{n-m}x}+C.$$

Passons à l'intégration de la 2de expression

$$\sin^m x\cos^n x\,dx.$$

On pose

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\cos^{n-1}x\sin^m x\cos x\,dx$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^{n-2}x\sin^{m+2}x\,dx.$$

Mais à cause de $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ on a

$$\int\cos^{n-2}x\sin^{m+2}x\,dx=\int\cos^{n-2}x\sin^m x\,dx-\int\cos^n x\sin^m x\,dx.$$

Donc

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^{n-2}x\sin^m x\,dx-\frac{n-1}{m+1}\int\cos^n x\sin^m x\,dx.$$

Donc enfin

(C) $$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\cos^{n-2}x\sin^m x\,dx.$$

On abaisse ainsi de deux unités l'exposant de $\cos x$.

On aurait pu trouver une autre formule qui abaisse de deux unités l'exposant de $\sin x$. Pour cela on aurait posé.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^n x \sin^{m-1} x \sin x dx. \quad \text{\&c}-$$

Il faut abaisser celui des deux exposants m et n qui est impair si n est impair on prendra la 1re formule et on parviendra à un terme

$$\int \cos x \sin^m x dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C.$$

Si m et n sont impairs on diminuera le plus petit des deux, s'ils sont tous deux pairs en diminuant le plus petit on le réduira à zéro et on aura à intégrer

$$\int \sin^m x dx,$$

Pour cela ~~il te suffit de faire n = o de la 1re expression que nous avons traitée~~, On emploiera la formule (B) p. 202.

On pourrait aussi poser

$\sin x = y$ d'où $\cos x dx = dy \quad dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

et on aurait

$$\int \sin^m x dx = \int \frac{y^m dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cherchons enfin l'intégrale de la 3e expression

$$\frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$$

Pour cela je remarque que nous avons

$$\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} = \int \frac{dx(1-\cos^2 x)}{\sin^m x \cos^n x} = \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} - \int \frac{\cos x dx}{\sin^m x \cos^{n-1} x}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} - \frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{n-1}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}$$

Donc enfin

$$(\mathbf{D})\quad \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}$$

Au moyen de cette formule on abaisse l'exposant du sinus. On pourrait de même abaisser celui du cosinus.

Si m est pair on parviendra au terme

$$\int \frac{dx}{\cos^n x}$$

Pour trouver cette intégrale il faut faire ~~m~~=n ds la formule (E) ~~expression~~, et on ~~trouvera~~ parviendra si n est pair, au terme $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang x + C$

si n est impair, à $\int \frac{dx}{\cos x} = l \tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

Si m est impair on parviendra au terme

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^n x}.$$

Abaissant ds cette expression l'exposant du cosinus ~~co~~ nous avons abaissé celui du sinus, ns aurons

si n est pair $\int \frac{dx}{\sin x} = l \tang \frac{1}{2} x + C.$

si n est impair $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \tang x + C.$

On peut en général rendre rationnelle toute fonction circulaire. Il suffit pour cela de trouver une nouvelle variable dont toutes les lignes trigonométriques soient des fonctions rationnelles. Cette nouvelle variable est la tangente de la moitié de l'angle.

Ainsi supposons qu'on ait

$$\int dx\, F(\sin x, \cos x, \operatorname{tang} x, \cot x, \text{séc}\, x, \text{coséc}\, x)$$

Je pose $\operatorname{tang} \frac{x}{2} = u$ d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{2u}{1-u^2} \qquad \cot x = \frac{1-u^2}{2u}$$

$$\text{séc}\, x = \sqrt{1 + \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2u^2+u^4}{(1-u^2)^2}} = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\text{coséc}\, x = \sqrt{1 + \frac{(1-u^2)^2}{4u^2}} = \sqrt{\frac{2u^2+1+u^4}{4u^2}} = \frac{u^2+1}{2u}$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

Pour trouver dx, je remarque que nous avons

$$d \sin x = \cos x\, dx = \frac{2(1+u^2)du - 4u^2 du}{(1+u^2)^2}.$$

d'où

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} dx = \frac{2(1+u^2)du - 4u^2 du}{(1+u^2)^2}$$

$$dx = \frac{2\, du}{1+u^2}.$$

Substituant ces valeurs on aura à intégrer une fonction rationnelle de u.

Intégration des fonctions à plusieurs variables indépendantes.

Pour qu'une fonction de la forme

$$M dx + N dy$$

soit la différentielle exacte de $u = f(x, y)$ il faut qu'on ait, nous l'avons déjà trouvé (p. 48),

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

De même pour que l'expression

$$M dx + N dy + P dz$$

soit une différentielle exacte, on doit avoir

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

D'après cela proposons nous de trouver l'intégrale de

$$Mdx + Ndy$$

en supposant que cette fonction soit une différentielle exacte. En représentant par u l'intégrale cherchée u sera égal à $\int Mdx$ plus une quantité ~~contenant~~ indépendante de x qui peut contenir y et qu'on représente par Y. Nous aurons donc

$$u = \int Mdx + Y \qquad d'où$$

$$\frac{du}{dx}dx = Mdx$$

$$\frac{du}{dy}dy = \left(\frac{d\int Mdx}{dy} + \frac{dY}{dy}\right)dy$$

Ainsi

$$du = Mdx + Ndy = Mdx + \left(\frac{d\int Mdx}{dy} + \frac{dY}{dy}\right)dy.$$

$$d'où \quad Ndy = \left(\frac{d\int Mdx}{dy} + \frac{dY}{dy}\right)dy.$$

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{d\int Mdx}{dy}.$$

Il faut démontrer que lorsque la condition d'intégrabilité est satisfaite la valeur de Y existe toujours.

Or nous savons que

$$\frac{d\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$$

Posons $\frac{du}{dx} = v$ nous aurons

$$\frac{d\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{dv}{dy} \qquad d\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy}dx.$$

Intégrant en faisant varier x seulement nous

aurons $\frac{du}{dy} = \int \frac{dv}{dy} dx$

Mais $d_x u = v\,dx$ d'où $u = \int v\,dx$

Donc en substituant

$$\frac{d\int v\,dx}{dy} = \int \frac{dv}{dy} dx$$

Comme on intègre par rapport à x seulement, on peut ajouter une quantité indépendante d'x et fonction d'y qu'on représente par $\varphi(y)$ et on aura

$$\frac{d\int v\,dx}{dy} = \int \frac{dv}{dy} dx + \varphi(y).$$

Mais $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ------ Nous aurons donc d'après cette règle

$$N = \int \frac{dM}{dy} dx = \frac{d\int M\,dx}{dy} + \varphi(y)$$

Substituant cette valeur de N ds celle de $\frac{dY}{dy}$ nous aurons

$$\frac{dY}{dy} = \frac{d\int M\,dx}{dy} + \varphi(y) - \frac{d\int M\,dx}{dy} = \varphi(y).$$

d'où $Y = \int dy\,\varphi(y)$

Ainsi la valeur d'Y existe lorsque la condition d'intégrabilité est satisfaite.

Or de l'éq. $\frac{dY}{dy} = N - \frac{d\int M\,dx}{dy}$ nous trouv[ons]

$$Y = \int\left(N - \frac{d\int M\,dx}{dy}\right) dy.$$

Substituant cette valeur ds la 1re éq. ns aurons

$$u = \int M\,dx + \int\left(N - \frac{d\int M\,dx}{dy}\right) dy.$$

En remplaçant x par y on trouverait

$$u = \int N\,dy + \int\left(M - \frac{d\int N\,dy}{dx}\right) dx.$$

Soit par ex

$$du = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$$

Nous aurons

$$Ndy = \frac{xdy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{dy}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad \text{d'où}$$

$$\int N\,dy = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

Nous aurons donc

$$u = \text{arc tang}\frac{y}{x} + \int\left(-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)dx$$

$$u = \text{arc tang}\,\frac{y}{x} + C$$

Proposons nous maintenant de trouver l'intégrale de la fonction à trois variables indépendantes

$$du = \mathbf{M}dx + \mathbf{N}dy + \mathbf{P}dz.$$

Nous pouvons poser

$$u = \int \mathbf{M}dx + \mathbf{V}$$

V étant une fonction de y et de z. Nous aurons

$$du = \mathbf{M}dx + \mathbf{N}dy + \mathbf{P}dz =$$

$$\mathbf{M}dx + \left(\frac{d\int\mathbf{M}dx}{dy} + \frac{d\mathbf{V}}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\int\mathbf{M}dx}{dz} + \frac{dV}{dz}\right)dz.$$

$$\text{d'où} \quad N = \frac{d\int M dx}{dy} + \frac{d\mathbf{V}}{dy} \quad \mathbf{P} = \frac{d\int M dx}{dz} + \frac{dV}{dz}$$

$$\frac{dV}{dy} = N - \frac{d\int M dx}{dy} \quad \frac{d\mathbf{V}}{dz} = \mathbf{P} - \frac{d\int M dx}{dz}$$

Mais puisque V est une fonction de y et de z nous avons

$$dV = \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz$$

$$\text{d'où} \quad dV = \left(N - \frac{d\int M dx}{dy}\right)dy + \left(P - \frac{d\int M dx}{dz}\right)dz.$$

Pour que ce 2^d membre soit une différentielle

exacte, il faut que l'on ait

$$\frac{d\left(N - \frac{d\int M\,dx}{dy}\right)}{dz} = \frac{d\left(P - \frac{d\int M\,dx}{dz}\right)}{dy}$$

ou bien

$$\frac{dN}{dz} - \frac{d\int M\,dx}{dy\,dz} = \frac{dP}{dy} - \frac{d\int M\,dx}{dy\,dz}$$

ou enfin

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Or cette relation est une des conditions d'intégrabilité elle est donc toujours satisfaite. Cela posé ns aurons en intégrant dV d'après la formule générale

$$V = \int\left(N - \frac{d\int M\,dx}{dy}\right)dy + \int\left(P - \frac{d\int M\,dx}{dz} - \frac{d\int\left(N - \frac{d\int M\,dx}{dy}\right)dy}{dz}\right)dz.$$

Ainsi substituant cette valeur ds la 1re éq. ns aurons pour la formule générale des fonctions à trois variables

$$u = \int M\,dx + \int\left(N - \frac{d\int M\,dx}{dy}\right)dy$$
$$+ \int\left(P - \frac{d\int M\,dx}{dz} - \frac{d\int\left(N - \frac{d\int M\,dx}{dy}\right)dy}{dz}\right)dz.$$

Soit une fonction
$$u = f(x)$$
nous avons en ~~intégrant~~ différentiant
$$du = f'(x)\,dx = p\,dx.$$
Réciproquement en intégrant cette éq. nous aurons $u = \int p\,dx + C = f(x) + C$

La constante C est une quantité qu'il faut déterminer d'après certaines conditions données par la question. Par ex. si on veut que u devienne zéro pour $x = a$ on aura
$$f(a) + C = 0 \quad \text{d'où} \quad C = -f(a)$$
et par suite
$$u = f(x) - f(a).$$
Lorsqu'x est quelconque dans cette dernière éq. c'est ce qu'on appelle une <u>intégrale indéfinie</u>

Mais si on donne à x une valeur déterminée $x = b$ par ex. on aura
$$u = f(b) - f(a)$$
on pose
$$u = \int_a^b p\,dx.$$
et on lit: intégrale depuis b jusqu'à a de $p\,dx$. Cette intégrale se nomme <u>intégrale définie</u>

Cette intégrale définie peut s'obtenir immédiatement en partant de l'intégrale $u = f(x) + C$ Car faisant successivement $x = a$ $x = b$ on a
$$f(a) + C \qquad f(b) + C \quad \text{d'où retranchant}$$
$$f(b) - f(a).$$
L'expression $\int_a^b p\,dx$ est la valeur de

l'intégrale de $p\,dx$ prise entre les limites $x=a$ $x=b$.

L'intégrale d'une fonction prise entre les limites $x=a$ $x=b$ est égale à la somme des différentielles de la fonction correspondantes aux valeurs infiniment rapprochées de x comprises entre $x=a$ et $x=b$.

A p p_1 p_2 .... p_n

Soit $Ap=a$ $Ap_n=b$ je partage l'intervalle pp_n en un nombre n de parties et je pose $Ap=x_0$ $Ap_1=x_1$ ... $Ap_n=x_n$. Soient $p_0\ p_1 \cdots p_n$ les dérivées de la fonction proposée correspondant à x_0 $x_1 \ldots x_n$. La somme des différentielles comprises entre $x=a$ et $x=b$ sera:

$$p_0 dx_0 + p_1 dx_1 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1}.$$

Nous allons démontrer que plus les intervalles sont petits plus cette somme s'approche de devenir égal à $\int_{x_0}^{x_n} p\,dx$.

Nous avons en général en posant $\frac{du}{dx}=\mathfrak{S}$

$$v-u=\mathfrak{S}(X-x)+\eta(X-x)$$

Faisant varier X et x nous aurons.

$$x_1-x_0=dx_0$$

$$x_2-x_1=dx_1$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_n-x_{n-1}=dx_{n-1}$$

$$x_n-x_0=dx_0+dx_1+\cdots+dx_{n-1}$$

Mais nous avons aussi

$$u_1 - u_0 = p_0\, dx_0 + q_0\, dx_0$$
$$u_2 - u_1 = p_1\, dx_1 + q_1\, dx_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n - u_{n-1} = p_{n-1}\, dx_{n-1} + q_{n-1}\, dx_{n-1}$$

$$u_n - u_0 = p_0\, dx_0 + p_1\, dx_1 + \cdots + p_{n-1}\, dx_{n-1}$$
$$+ q_0\, dx_0 + q_1\, dx_1 + \cdots + q_{n-1}\, dx_{n-1}.$$

Mais $u_n - u_0 = f(x_n) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_n} p\,dx$ ainsi

$$\int_{x_0}^{x_n} p\,dx = p_0\, dx_0 + \cdots + p_{n-1}\, dx_{n-1} + q_0\, dx_0 + \cdots + q_{n-1}\, dx_{n-1}$$

Posant $$\frac{q_0\, dx_0 + q_1\, dx_1 + \cdots + q_{n-1}\, dx_{n-1}}{x_n - x_0} = \theta.$$

d'où
$$q_0\, dx_0 + \cdots + q_{n-1}\, dx_{n-1} = \theta(x_n - x_0) = \theta\, dx_0 + \cdots + \theta\, dx_{n-1}.$$
θ sera compris entre la plus grande et la plus petite valeur de q, ainsi à mesure que q diminuera le 2d membre de cette dernière diminuera aussi et pour $q = 0$ on aura

$$\int_{x_0}^{x_n} p\,dx = p_0\, dx_0 + p_1\, dx_1 + \cdots + p_{n-1}\, dx_{n-1}$$

Ainsi $\int_{x_0}^{x_n} p\,dx$ est la limite vers laquelle tend la somme des différentielles.

Ainsi par ex. pour l'expression $\frac{dx}{e^{x^2}}$ nous aurons en supposant tous les intervalles égaux, c. à d. $dx_0 = dx_1 = dx_2 \ldots$

$$\int_{x_0}^{x_n} p\,dx = dx\left(\frac{1}{e^{x_0^2}} + \frac{1}{e^{x_1^2}} + \frac{1}{e^{x_2^2}} + \cdots + \frac{1}{e^{x_{n-1}^2}}\right)$$

Intégration par Séries.

Soit proposé d'intégrer l'expression

$$du = \frac{dx}{a+x}$$

Nous avons

$$(a+x)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}x + \frac{1.2}{1.2}a^{-3}x^2 - \frac{1.2.3}{1.2.3}a^{-4}x^3 + -$$

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \&c -$$

On aura donc

$$du = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} - \&c -$$

et en intégrant

$$u = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \cdots + C.$$

Mais nous savons déjà que

$$\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$$

nous aurons donc

$$l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \& -- + C.$$

Pour déterminer C faisons $x=0$ ce qui donne

$$C = la. \quad \text{et par suite}$$

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - - -$$

Ainsi nous trouvons par l'intégration par série une formule que nous avons déjà trouvée par la série de Taylor.

On peut par la même méthode trouver le développement de $u = \text{arc sin } x$. En effet nous aurons

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}x^6 + \cdot -$$

$$\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int dx + \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{3}{8}\int x^4 dx + \cdots + C$$

$$\text{arc sin } x = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5} + \&c.$$

Pour $x = 0$ on a $C = 0$ par const.

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots$$

Pour trouver au moyen de cette formule la valeur de π on fera $x = \frac{1}{2}$ ce qui donne

$$\text{arc sin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{64} + \cdots$$

Pour trouver l'intégrale de $\frac{e^x dx}{x}$ je remarque que nous avons

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots \quad \text{d'où}$$

$$\frac{e^x dx}{x} = \frac{dx}{x} + dx + \frac{x dx}{1.2} + \frac{x^2 dx}{1.2.3} + \cdots$$

$$\int \frac{e^x dx}{x} = lx + x + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{x^3}{3} + \&c$$

Applications du Calcul intégral à la Géométrie.

Soit BC une courbe quelconque on veut avoir la longueur d'une portion de cette courbe comprise entre le point B et un point quelconque M. Je pose ~~Bm = s B~~ Nous aurons

$\frac{Y-y}{X-x} = \tan g\, Mmz$ d'où $\frac{dy}{dx} = \tan g\, omz = \frac{oz}{mz}$.

Mais si on pose $BM = S$ $Bm = s$ on aura

$$\frac{S-s}{X-x} = \frac{mM}{mz}$$

Si on suppose que la ligne mz devienne infiniment petite, les différentielles seront égales aux différences et on aura

$$\frac{dS}{dx} = \frac{mo}{mz} = \sec omz \qquad \text{or}$$

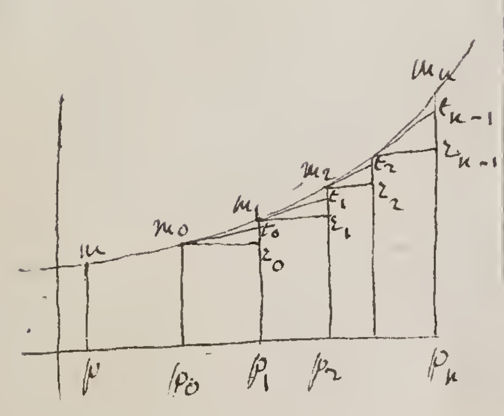
$$\sec omz = \sqrt{1+\tan g^2 omz} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{donc}$$

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

On tire de là

$$S = \int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{ou bien}$$

$$S = \int dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$



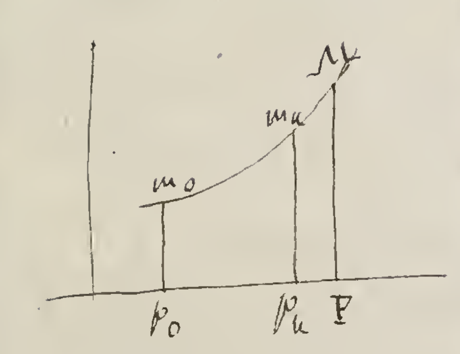
On peut trouver d'une autre manière la longueur de la portion de courbe comprise entre m_0 et m_n. En effet, si on partage l'intervalle $p_0 p_n$ en un certain nombre de parties

que par les points correspondants de la courbe ou même des tangentes, si on suppose ensuite que les divisions décroissent indéfiniment on aura

$$mr = dx \quad mt = dx \sec tmr = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

On peut poser $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = p$ et alors la somme des tangentes $m_0t_0 + m_1t_1 + \cdots$ sera égale à $p_0dx_0 + p_1dx_1 + \cdots p_{n-1}dx_{n-1}$. La limite vers laquelle tend cette dernière somme est $\int_{x_0}^{x_n} p\,dx$ et comme l'arc est la limite vers laquelle tend la somme des tangentes on aura

$$\text{arc } m_0m_n = \int_{x_0}^{x_n} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$



Proposons nous d'évaluer la surface $m_0p_0m_np_n$. Pour cela je pose $m_np_nm_0p_0 = u$, $MPm_0p_0 = v$

nous aurons $$\frac{v-u}{X-x} = \frac{MPm_np_n}{Pp_n}$$

Lorsque p_nP sera infiniment petit la surface MPm_np_n pourra être regardée comme un rectangle dont la hauteur est $m_np_n = y$ et la base p_nP, cette surface divisée par p_nP sera donc égale à y et on aura

$$\frac{du}{dx} = y \text{ d'où } u = \int y\,dx.$$

On peut évaluer d'une 2de manière la surface $m_0p_0m_np_n$. Car si on partage cette surface par des parallèles à l'axe des x

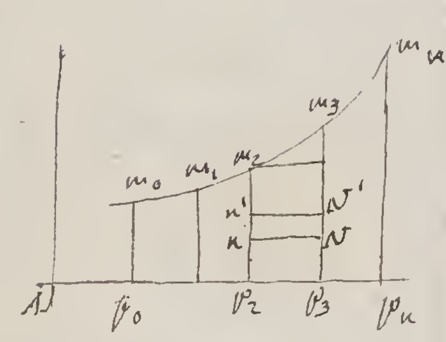
et qu'on suppose ensuite que les distances $p_0 p_1$ deviennent infiniment petites, la somme de ces petites surfaces sera

$$y_0 dx_0 + y_1 dx_1 + \cdots y_{n-1} dx_{n-1} = \int_{x_0}^{x_n} y dx.$$

Mais la somme des surfaces infiniment petites est égale à la surface totale par const.

$$m_0 p_0 m_n p_n = \int_{x_0}^{x_n} y dx.$$

La quantité $\theta(x_n - x_0)$ que nous avons trouvée précédemment est égale ici à la somme $m_0 t_0 m_1 + m_1 t_1 m_2 + \&c.$

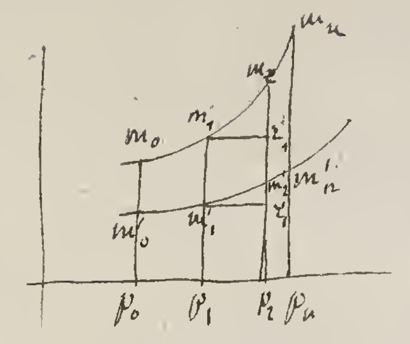


On peut encore supposer chacune des bandes $m_2 p_2 p_3 m_3$ partagée en petits rectangles $nn'N'N$. Posant $Ap_2 = x$ $p_2 n = y$, si les rectangles sont infiniment petits on aura $p_2 p_3 = nN = dx$ $nn' = dy$ par const. la surface du rectangle sera $dx dy$. Si on regarde x comme constant et qu'on intègre cette expression par rapport à y on aura pour la surface totale de la bande $\int dx dy = y dx + C$, pour déterminer C on fait $y=0$ ce qui donne $C=0$, on aura donc

$$m_2 m_3 p_3 p_2 = y dx.$$

Pour trouver la surface totale il faudra intégrer $\int dx dy$ par rapport à x seulement, ou bien intégrer $y dx$ et on aura

$$m_0 p_0 m_n p_n = \int\int dx dy = \int^2 dx dy = \int y dx.$$

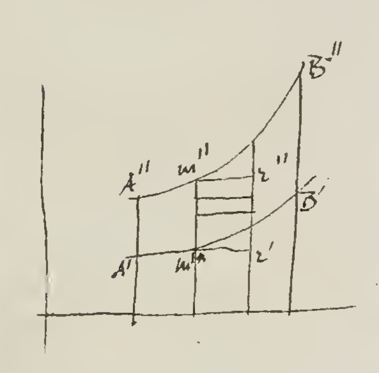


(x) qu'on peut considérer $\omega = m_1 z_1 z_1' m_1'$

Pour évaluer l'espace $m_0 m_n m_n' m_0'$ on remarque que la bande $m_1' m_2 m_2' m_1'$ (x) sera égale à $(y'-y)dx$ et on aura pour la surface totale

$$\int_{x_0}^{x_n} (y'-y)\, dx.$$

On peut encore supposer la bande partagée en rectangles infiniment petits et on aura $m'z'm''z'' = \int dx dy = dx(y+C)$. Représentons par y' les ordonnées de la courbe $A'B'$ et par y'' les ordonnées de la courbe $A''B''$ remplaçant y par y' ds l'intégrale précédente celle doit devenir nulle, nous aurons donc

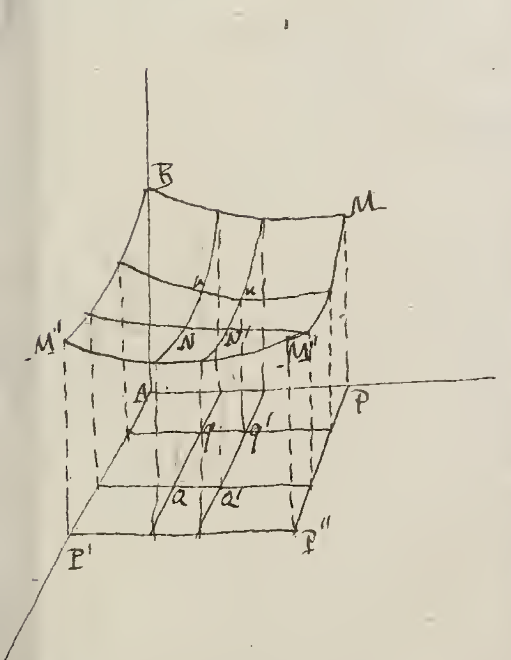


$$dx(y'+C) = 0 \quad \text{d'où} \quad C = -y'$$

et par suite

$$A'B'B''A'' = \int^2 dx dy = dx(y''-y')$$

Proposons nous d'évaluer une surface courbe $BMM''M'$ terminée par les plans zx et zy et par des plans parallèles à ceux-ci. Coupons cette surface en différentes bandes par des plans parallèles aux plans de projection. Nous aurons



$$qq'a'a = dx dy.$$

Mais la partie du plan tangent en $\underline{n}$ et correspondant à $nn'N'N''$ est égale à $dx dy \sec\theta$. θ étant l'angle du plan tangent et de celui des xy. Soit $z = f(x,y)$ l'éq. de la surface en posant $p = \frac{dz}{dx}$ $q = \frac{dz}{dy}$ nous aurons.

$$\sec\theta = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

par consᵗ. la partie du plan tangent sera

$$dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Intégrant par rapport à y nous aurons pour la valeur d'une bande parallèle à zy

$$dx\int dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Intégrant par rapport à x on aura

$$BMM''M' = \int dx \int dy\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Ou bien, puisque l'ordre des intégrales est arbitraire

$$BMM''M' = \int^2 dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

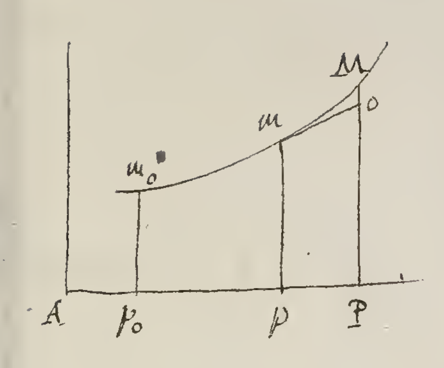
Cette intégrale doit être prise entre certaines limites. Par ex. si $AP = a$ $AP' = b$. il faut intégrer entre $x=0$, $x=a$ et entre $y=0$, $y=b$.

Si la projection sur le plan des xy est terminée par des courbes il faudra intégrer jusqu'aux valeurs générales de x et de y tirées des éq. de ces courbes.

Pour avoir le solide BF'' on conçoit chaque prisme uQ' partagé en une infinité d'autres petits prismes. Le volume d'un de ces éléments sera $dx\,dy\,dz$. Pour avoir le volume total il faudra intégrer trois fois ce qui donnera $\int^3 dx\,dy\,dz$.

Si on supposait une 2ᵉ surface au dessus de la 1ʳᵉ et qu'on cherchât le volume compris on aurait.

$$\int^2 dx\,dy\,(z''-z').$$



Supposons que la surface $m_0 p_0 m p$ tourne autour de AP et qu'on demande le solide engendré. Nommant V le solide engendré par $m_0 P$ et v le volume engendré par $m_0 p$. Nous aurons

$$\frac{V-v}{X-x} = \frac{\text{sol. } mpMP}{pP}.$$

Lorsque pP sera très petit le solide sera un cylindre et ce on divise par la hauteur on devra avoir la base par const.

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2 \quad dv = dx\,\pi y^2 \quad \text{et}$$

$$v = \pi \int dx y^2.$$

On serait parvenu au même résultat en considérant mpMP comme engendrant un tronc de cone. Car alors la solidité de ce tronc de cône sera $\frac{1}{3}\pi(y^2+Y^2+Yy)\,dx$.

Mais à la limite $y=Y$ donc la solidité d'un élément est

$$\pi y^2 dx.$$

Pour trouver la surface engendrée par la courbe $m_0 M$ on remarque que la surface engendrée par mM est à la limite $2\pi\left(\frac{y+Y}{2}\right) mo$. Mais à la limite

$$y = Y \quad \text{et} \quad mo = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{donc}$$

en nommant z la surface de révolution

$$\frac{dz}{\cancel{dx}} = 2\pi y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{d'où}$$

$$z = 2\pi \int y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Prenons pour ex. le cercle dont l'éq. est

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

Ns aurons $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Pour trouver la valeur d'un arc nous emploierons la formule générale

$$s = \int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ substituant on a

$$\int dx\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}} = a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \arcsin\frac{x}{a}+C.$$

On trouve la même chose par la géométrie;

Pour évaluer une portion de la surface nous aurons la formule $\int y\,dx$ qui devient

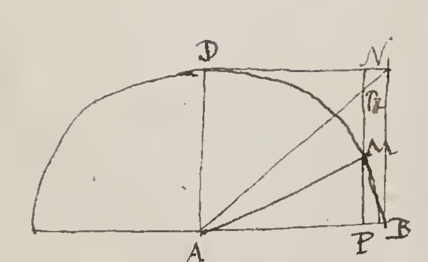
$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Or nous avons

$$\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x\sqrt{a^2-x^2}+\int dx\sqrt{a^2-x^2}$$

Donc $\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$



Si on veut avoir l'espace APMD, et pour $x=0$, $C=0$ cet espace sera

$$\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

La géométrie conduit au même résultat

Car représentons par θ l'angle DAM, ns aurons

$$1:\sin\theta = a:x \quad \text{d'où} \quad \sin\theta=\frac{x}{a}$$

$$\theta=\arcsin\frac{x}{a}$$

Ms nous avons la proportion

$$1:\theta = a:DM \quad \text{d'où} \quad DM = a\theta = a\arcsin\frac{x}{a}.$$

$$DAM = \frac{1}{2}a\,DM = \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

$$MAP = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{donc}$$

$$APMD = \frac{1}{2} a^2 \text{arc sin} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Supposons qu'on demande la surface engendrée par un arc de cercle qui tourne autour de AP, nous aurons la formule

$$2\pi \int y dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Nous aurons donc ds ce cas

$$2\pi \int y dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = 2\pi a \int dx = 2\pi a x + C.$$

Si on demande la surface décrite par DM, il faut faire $C = 0$ on aura $2\pi a x$. La surface ~~compris~~ décrite par un arc compris entre $x = b$ et $x = c$ sera $2\pi a (c - b)$.

Pour déterminer le solide engendré on aura

$$\pi \int y^2 dx = \pi \int (a^2 - x^2) dx = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Or $\pi a^2 x$ est égal au cylindre engendré par APND $\frac{\pi x^3}{3}$ est égal au cône engendré par APR. Ainsi le volume APMD est égal à la différence entre le cylindre APND et le cône APR.

Si on a deux courbes telles qu'il existe une relation connue entre leurs ordonnées, connaissant la surface comprise entre une de ces courbes et l'axe des x, on déterminera aisément la surface comprise entre l'autre courbe et l'axe des x.

Ainsi soient

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad z = mf(x) = my$$

les éq. de ces deux courbes. La surface de la 1re sera

$\int y\,dx$ et celle de la 2de $\int z\,dx = m\int y\,dx$.

De même pour le volume engendré par la 1re on aura

$\pi\int y^2dx$ et pour la 2de $\pi\int z^2dx = m^2\pi\int y^2dx$.

Soient par ex. un cercle et une ellipse dont les éq. sont

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{et} \quad z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

L'aire d'une portion du cercle sera $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ et celle de l'ellipse $\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Ainsi l'aire d'une ellipse est égale à l'aire du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre multipliée par le rapport du petit axe au grand.

La surface d'une portion de sphère est $2\pi\int y\,dx\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}$ ~~$2\pi a x$~~, celle d'une portion d'ellipsoïde sera

$$2\pi\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = 2\pi\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a^4+x^2(b^2-a^2)}{a^2(a^2-x^2)}}$$

En général une surface de révolution est donnée par la formule

$$2\pi\int y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Mais nous avons trouvé pour la normale à une courbe

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ainsi l'expression de la surface est

$$2\pi\int N\,dx.$$

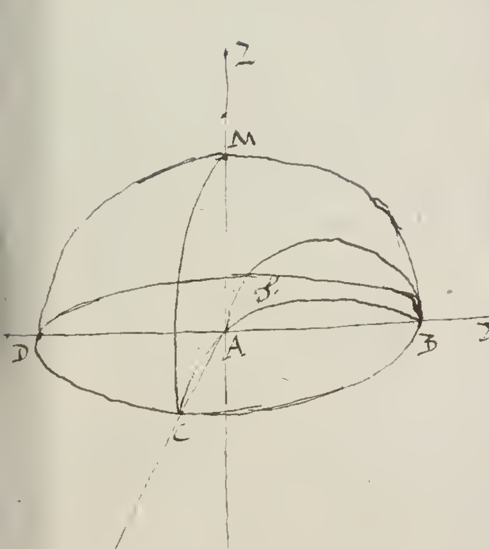
Si sur chaque ordonnée nous prenons une longueur égale à la normale au point correspondant en joignant les extrémités de ces lignes nous aurons une courbe dont l'éq sera

$$x = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

L'aire comprise entre cette courbe et l'axe des x sera

$$\int y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Ainsi en multipliant cette aire par 2π on aura la valeur de la surface engendrée par la courbe donnée.



Soit BCXM une demi-sphère, sur AB comme diamètre nous décrivons une circonférence que nous regardons cō la trace d'un cylindre droit sur le plan des zx, ce cylindre coupe la surface de la sphère suivant la courbe CB'B on demande la valeur de la surface BB'CM.

L'éq de la sphère est

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

Or la formule qui donne une surface rapportée à trois axes est

$$\int^2 dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy}$$

Nous aurons donc pour la sphère

$$p = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad q = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

et remplaçant ces valeurs dans la formule générale elle devient

$$\int^2 dx\,dy\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}$$

Intégrant d'abord par rapport à y nous aurons

$$(1)\quad a\int dx\left(\arc\sin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}+C\right)$$

Or les deux éq.

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$
$$z^2=ax-x^2$$

donnent $y^2=a(a-x)$ *

~~nous aurons donc en substituant ds la formule~~

$$(+)\quad a\int dx\,\arc\sin\sqrt{\frac{a}{a+x}}$$

* éq. qui représente la projection sur le plan des xy de l'intersection de la sphère et du cylindre. Il faut donc prendre l'intégrale (1) depuis $y=0$ jusqu'à $y=\sqrt{a(a-x)}$ ce qui donnera (+)

Posons

$$\frac{a}{a+x}=u^2 \quad d'où \quad a+x=\frac{a}{u^2} \qquad dx=\frac{-2a\,du}{u^3}$$

nous aurons

$$a\int dx\,\arc\sin\sqrt{\frac{a}{a+x}}=a\int\frac{-2a\,du}{u^3}\arc\sin u$$

$$=a^2\int\frac{-2du}{u^3}\arc\sin u$$

Intégrant par parties nous aurons

$$\int\frac{-2du}{u^3}\arc\sin u=\frac{1}{u^2}\arc\sin u-\int\frac{1}{u^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Posons $u=\cos\varphi$ d'où $\sqrt{1-u^2}=\sin\varphi$.

et nous aurons

$$\int\frac{1}{u^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=-\tang\varphi+C=-\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}+C.$$

Nous aurons donc

$$\int\frac{-2du}{u^3}\arc\sin u=\frac{1}{u^2}\arc\sin u+\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}+C.$$

Enfin remplaçant u par sa valeur

$$a\int dx\left(\arc\sin\sqrt{\frac{a}{a+x}}\right)=a(a+x)\arc\sin\sqrt{\frac{a}{a+x}}+a^2\sqrt{\frac{x}{a}}+C.$$

Il faut intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$.

pour cela faisant $x=0$ ds le 2^d membre nous aurons

$$\frac{a^2\pi}{2}+c$$

faisant $x=a$ ns aurons

$$\frac{a^2\pi}{2}+a^2+c.$$

Retranchant la 1re expression de la 2de il reste a^2 pour la surface cherchée.

Proposons nous de trouver le volume d'une portion de paraboloïde hyperbolique compris entre les plans coordonnés et un cylindre droit à base circulaire dont l'axe est l'axe des z.

En choisissant convenablement les plans coordonnés, l'éq. de cette surface est

$$z=\frac{xy}{a}$$

$$\int^3 dx\,dy\,dz = \int^2 dx\,dy\,\frac{xy}{a}=\frac{1}{a}\int x\,dx\int y\,dy.$$

Intégrant d'abord par rapport à y il vient

$$\frac{1}{2a}\int x\,dx.y^2$$

Or l'éq. du cylindre est

$$y^2+x^2=a^2.$$

Nous aurons donc pour le volume compris entre les plans coordonnés et le cylindre

$$\frac{1}{2a}\int x\,dx(a^2-x^2)=\frac{1}{2a}\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+c\right)\ (*)$$

(*) Pour $x=0$ on a $C=0$

Il faut prendre cette intégrale entre $x=0$ et $x=a$. $x=0$ donne ~~$\frac{a}{4}$~~ 0 $x=a$ donne $\frac{a^3}{8}$. Le volume que nous cherchons est donc $\frac{a^3}{8}$.

Proposons nous de rectifier un arc de spirale. L'éq. d'une spirale est

$$u = f(t)$$

t étant l'arc et u le rayon vecteur. Soit ME un arc de cercle décrit du point A comme centre. Si l'angle MAm est très petit on pourra considérer Mm comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle MEm et on aura

$$Mm = ds = \sqrt{du^2 + u^2dt^2}$$

$$S = \int\sqrt{du^2 + u^2dt^2}$$

ou enfin $S = \int du\sqrt{1 + u^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2}$.

L'éq. d'une parabole qui passe par l'origine est

$$y^2 = 2px.$$

Pour trouver l'aire d'une portion de cette parabole comprise entre l'axe des x et une parallèle à l'axe des y nous aurons la formule $\int ydx$ qui devient d'après cela

$$\int\sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} + C.$$

Pour $x = 0$ la surface est 0 donc $C = 0$ et on a pour cette surface

$$\frac{2}{3}x\sqrt{2px} = \frac{2}{3}xy.$$

Pour trouver la longueur d'un arc de courbe nous avons la formule

$$\int dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Or dans la parabole $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$. Nous aurons donc pour la longueur de l'arc

$$\int dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Or l'éq. d'une hyperbole équilatère dont le demi axe est égal à p est

$$x = \sqrt{p^2+y^2}$$

Soit BN cette hyperbole l'aire BAQN sera égale à $\int x\,dy = \int \sqrt{p^2+y^2}\,dy$

Ainsi l'arc AM est égal à l'aire BAQN divisée par le paramètre.

L'aire AQM $= \int x\,dy$ l'aire APM $= \int y\,dx$. donc

$$APMQ = \int (x\,dy + y\,dx) = xy + C.$$

si on prend la surface depuis l'origine on aura $C=0$. si on la prend entre les limites

$$AP = x \quad PM = y \quad AP' = x' \quad P'M' = y'$$

on aura pour la surface

$$PMQQ'M'P' = xy - x'y'.$$

Si nous prenons une parabole d'un degré quelconque dont l'éq. est

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

nous aurons pour la surface

$$\int y\,dx = \int ax^{\frac{m}{n}}dx = \frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n}xy + C.$$

Il y a un cas où cette formule ne peut plus donner la surface, c'est celui où $\frac{m}{n} = -1$ alors la formule devient infinie. Dans ce cas l'éq. est

$$y = \frac{a}{x}$$

elle représente une hyperbole équilatère

On a dans ce cas

$$\int y\,dx = \int \frac{a\,dx}{x} = a\,lx + C,$$

Si on prend l'intégrale entre les limites
$x=c$, $x=b$ on aura

$$alc + C$$
$$alb + C$$

Ainsi la surface comprise entre ces deux limites sera $al\frac{c}{b}$. Si au lieu de c on prend $c^2\ c^3 \ldots$ les aires correspondantes seront $2al\frac{c}{b}$, $3al\frac{c}{b}$ … c.à.d que ~~lorsque~~ les abscisses croissant en progression géométrique les aires croissent en progression arithmétique.

Pour rectifier la parabole générale nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} a x^{\frac{m}{n}-1} \quad \text{d'où}$$

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int dx\sqrt{1+\frac{m^2a^2x^{\frac{2m}{n}-2}}{n^2}} = \frac{1}{n}\int dx\left(n^2+m^2a^2x^{\frac{2m}{n}-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour que cette différentielle binome puisse s'intégrer en terme algébrique il faut que

$$\frac{1}{\frac{2m}{n}-2} = \frac{n}{2m-2n} \quad \text{ou bien} \quad \frac{n}{2m-2n}+\frac{1}{2} = \frac{m}{2m-2n}$$

soit un nombre entier. Pour que la 1re expression soit entière il faut que n soit pair. ~~Posons n=2ν~~ ~~on aura~~ $\frac{2}{m-2\nu}$ et de plus que n soit divisible par $m-n$. Or si m et n sont ps entre eux n ne peut être divisible par $m-n$ que si $m-n=1$ car si on avait $n=(m-n)q$ on en tirerait

$$n(q+1)=mq \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{q} = \frac{m}{q+1}$$

Cette égalité ne peut subsister que si $m=nq'$ ~~ou $q=n$~~ ~~d'où $(m-n)=1$~~ ce qui est contre l'hypothèse. (x)

Pour que la 2de expression fût entière, il faudrait que m fût pair et $m-n=1$.

(x) ou bien $q=n$ d'où $m-n=1$.

D'après cela les hyperboles rectifiables en termes algébriques sont données par les formules

$$y = a x^{\frac{2z+1}{2z}} \qquad y = a x^{\frac{2z}{2z+1}}$$

De la 2de on tire

$$x = a' y^{\frac{2z+1}{2z}}$$

Ainsi ces deux formes d'éq. rentrent ds une seule.

L'éq. de la logarithmique est

$$y = a^x$$

nous aurons pour l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x

$$\int y dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C = \frac{y}{la} + C$$

La surface est nulle pour $y=0$ on a donc $C=0$.
Or $\frac{1}{la} = Se$ est la sous tangente constante de la logarithmique. Ainsi prenant $PM = y'$ $y'Se$ qui est égal à l'aire PB sera aussi égal à l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x depuis le pt P jusqu'à l'infini négatif.

L'éq. de la cycloïde est

$$x = a.\text{arc}\cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1} \quad \text{d'où } dx = dy\, y^{\frac{1}{2}}(2a-y)^{-\frac{1}{2}}$$

Nous aurons donc pour la surface

$$\int y dx = \int y^{\frac{3}{2}} dy (2a-y)^{-\frac{1}{2}}$$

Intégrant par parties, nous aurons

$$\int y^{\frac{3}{2}} dy\,(2a-y)^{-\frac{1}{2}} = -2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a-y} + 3\int dy\sqrt{2ay-y^2}$$

$$= -2y\sqrt{2ay-y^2} + 3\int dy\sqrt{2ay-y^2}$$

Si l'on prend $y = PM$ cette dernière expression est égale à la surface APM. Or représentons par z les coordonnées du cercle BRS perpendiculaires à BS nous aurons

$$BCRQ = \int z\,dy.$$

Or $z = RQ = \sqrt{BQ \cdot QS} = \sqrt{(2a-y)y} = \sqrt{2ay-y^2}$

ainsi $BCRQ = \int dy\sqrt{2ay-y^2}$.

Soit BzR un arc de parabole nous aurons

$$BzRQ = \tfrac{2}{3}BQRe = \tfrac{2}{3}y\sqrt{2ay-y^2}$$

Nous aurons donc

$$3(BCRQ - BzRQ) = 3\int dy\sqrt{2ay-y^2} - 2y\sqrt{2ay-y^2} = APM.$$

Ainsi une portion de la surface de la cycloïde est égale à 3 fois l'espace compris entre l'arc de cercle et l'arc de parabole.

En général on laisse l'expression de la surface de la cycloïde sous la forme

$$APM = 3\,BQR - 2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a-y} = 3\,BQR - 2y\sqrt{2ay-y^2}$$

Lorsque $y = 2a$ la surface est égale à $3BQR$. c. à. d. que la surface totale est égale à trois fois celle du cercle osculateur.

Pour rectifier la courbe nous avons la formule

$$\int dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \int dy\sqrt{1+\frac{y}{2a-y}} = \int dy\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}$$

$$= 2\sqrt{2a}\int\frac{dy}{2\sqrt{2a-y}} = -2\sqrt{2a}\sqrt{2a-y} + C.$$

Pour $y = 0$ on a $C = 4a$ ainsi on aura

$$AM = 4a - 2\sqrt{2a}\sqrt{2a-y}$$

pour $y = 2a$ nous aurons

$$AS = 4a$$

donc $MS = 2\sqrt{2a}\sqrt{2a-y} = 2\sqrt{4a^2-2ay} = 2\sqrt{BS.SQ} = 2SR.$

Pour trouver le volume engendré par la cycloïde qui tourne au tour de l'axe nous aurons

$$\int y^2 dx = \int y^{\frac{5}{2}} dy (2a-y)^{-\frac{1}{2}} = -2y^{\frac{5}{2}}\sqrt{2a-y} + 5\int y^{\frac{3}{2}} dy \sqrt{2a-y}$$

Mais $\int y^{\frac{3}{2}} dy \sqrt{2a-y} = -\frac{2}{3}\left(y^{\frac{3}{2}}(2a-y)^{\frac{3}{2}} + \int (2a-y)^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy.\right.$

$$\int (2a-y)^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy = \int y^{\frac{1}{2}} (2a-y)(2a-y)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 2a\int y^{\frac{1}{2}} dy (2a-y)^{\frac{1}{2}} - \int y^{\frac{3}{2}} dy (2a-y)^{\frac{1}{2}}.$$ Donc

$$2\int y^{\frac{3}{2}} dy \sqrt{2a-y} = -\frac{2}{3}(2a-y)^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} + 2a\int y^{\frac{1}{2}} dy (2a-y)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais $\int y^{\frac{1}{2}} dy (2a-y)^{\frac{1}{2}} = BCRQ.$

Nous aurons donc enfin pour le volume cherché

$$\pi\int y^2 dx = -\pi\left(2y^{\frac{5}{2}}\sqrt{2a-y} + \frac{5}{3} y^{\frac{3}{2}} (2a-y)^{\frac{3}{2}} + 5a\pi . BCRQ\right) + C.$$

Pour $y = 0$ $C = 0$ on aura donc encore

$$\pi\int y^2 dx = -\pi\left(\frac{10a-y}{3}\right) y^{\frac{3}{2}} (2a-y)^{\frac{1}{2}} + 5a\pi . BCRQ.$$

Faisant $y = 2a$ nous aurons

$$\text{vol. } ASB = 5a\pi\ BRS$$

et pour le volume total

$$5a\pi . BRSG.$$

Le cylindre décrit par le double de AHS est égal à $4BRSQ.2a\pi$. Ainsi le solide cycloïdal est au cylindre dans le rapport de 5 à 8.

Pour trouver la surface engendrée par la révolution de la cycloïde nous aurons la formule

$$2\pi\int y\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \pi\int y\,dy\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}$$

$$= 2\pi\sqrt{2a}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2a-y}}$$

Mais nous aurons en intégrant

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2a-y}} = -2\int y\left(\frac{-dy}{\sqrt{2a-y}}\right) = -2\left(y\sqrt{2a-y}-\int dy\sqrt{2a-y}\right)$$

$$= -2\left(y\sqrt{2a-y}+\frac{2}{3}(2a-y)^{\frac{3}{2}}+C\right)$$

Il faut intégrer depuis $y = 2a$ jusqu'à $y = 0$ nous aurons donc pour la quantité qui est entre parenthèses $-\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$ et par suite pour la surface $\frac{64}{3}\pi a^2$. C.à.d. que cette surface est égale aux $\frac{64}{3}$ du cercle générateur.

Considérons la parabole AM dont l'éq. est

$$y^2 = 2px.$$

Nous aurons pour la valeur de l'arc

$$AM = \int dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Or en différentiant l'éq. de la courbe on a $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$.

Donc $AM = \int dy\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{p^2+y^2}$.

Mais si nous construisons l'hyperbole équilatère dont le $\frac{1}{2}$ axe est p, nous aurons pour l'éq. de cette hyperbole

$$y^2 - x^2 = -p^2 \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{p^2+y^2}$$

$$BAaN = \int x\,dy = \int dy\sqrt{p^2+y^2}.$$

Donc $AM = \dfrac{BAaN}{p}$

Ainsi la rectification d'une parabole se ramène

à la quadrature d'une hyperbole équilatère

Considérons une parabole d'un ordre quelconque dont l'éq. est

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Nous aurons pour la surface comprise entre la courbe et l'axe des x

$$\int y\,dx = \int ax^{\frac{m}{n}}dx = \frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C = \frac{nax^{\frac{m}{n}+1}}{m+n} + C$$

$$= \frac{n}{m+n}xy + C$$

Exemples d'Intégrales.

$$\int \frac{\cos\frac{a}{x}\,dx}{x^3} = -\frac{1}{a}\frac{\sin\frac{a}{x}}{x} - \frac{1}{a}\int\frac{\sin\frac{a}{x}\,dx}{x^2} - \frac{1}{a^2}\cos\frac{a}{x} + C$$

Pour trouver cette intégrale on cherche d'abord celle de $\frac{\sin\frac{a}{x}\,dx}{x^2}$ ce qui donne

$$\int \frac{\sin\frac{a}{x}\,dx}{x^2} = + \frac{\sin\frac{a}{x}}{x} - a\int\frac{\cos\frac{a}{x}\,dx}{x^3}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{a}{x}\,dx}{x^3} = -\frac{\sin\frac{a}{x}}{ax} - \frac{1}{a}\int\frac{\sin\frac{a}{x}\,dx}{x^2}$$

On enfin

$$\int \frac{\cos\frac{a}{x}\,dx}{x^3} = -\frac{\sin\frac{a}{x}}{ax} - \frac{1}{a^2}\cos\frac{a}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Pour trouver cette intégrale on multiplie et on divise par $1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, ce qui donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = l\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

2376

$$\int \frac{dx}{1+x^3}$$

$$\int\frac{dx}{1+x^3} = \frac12\int\frac{(x^2-x+1-x^2+x+1)\,dx}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac12\int\frac{dx}{1+x}+\frac12\int\frac{-x^2+x+1}{1+x^3}\,dx$$

$$= \frac12\, l(1+x) + \frac12\int\frac{-x^2+x+1}{1+x^3}\,dx$$

$$\int\frac{-x^2+x+1}{1+x^3}\,dx = \int\frac{dx}{x^2-x+1} - \int\frac{x^2dx}{1+x^3} = \int\frac{dx}{x^2-x+1} - \frac13\, l(1+x^3)$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1} = \int\frac{dx}{(x-\frac12)^2+\frac34} = \frac43\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt3}\int\frac{\frac{2}{\sqrt3}\,dx}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt3}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{arctang}\,\frac{2x-1}{\sqrt3}.$$

Donc enfin

$$\int\frac{dx}{1+x^3} = \frac12\, l(1+x) - \frac16\, l(1+x^3) + \frac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{arctang}\,\frac{2x-1}{\sqrt3} + C.$$

$$\int\frac{dx}{1-x^3}$$

$$\int\frac{dx}{1-x^3} = \int\frac{dx}{(1-x)(x^2+x+1)} = \int\frac{(x^2+x+1-x^2-x)\,dx}{(1-x)(x^2+x+1)}$$

$$= -l(1-x) + \frac13\, l(1-x^3) - \int\frac{x\,dx}{1-x^3}$$

$$\int\frac{x\,dx}{1-x^3} = \frac13\int\frac{3x^2dx}{x(1-x^3)} = \frac13\int\frac{3x^2dx}{x} + \frac13\int\frac{3x^2dx}{1-x^3}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac13\, l(1-x^3)$$

$$\int\frac{dx}{1-x^3} = -l(1-x) + \frac23\, l(1-x^3) - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^3}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+x+1-x^2-x+1}{(1-x)(x^2+x+1)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,l(1-x) + \frac{1}{2}\int \frac{-x^2-x+1}{1-x^3}\,dx$$

$$\int \frac{-x^2-x+1}{1-x^3}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+x+1} - \int \frac{x^2\,dx}{1-x^3}$$

$$= \frac{1}{3}\,l(1-x^3) + \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2\,dx}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Donc enfin

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = -\frac{1}{2}\,l(1-x) + \frac{1}{6}\,l(1-x^3) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

---

236. 6.

Trouver l'intégrale $\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}}\,dx$.

Multipliant haut et bas par $\sqrt{a+x}$ on aura

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}}\,dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}\,dx.$$

Posant

$$\sqrt{(a+x)(b-x)} = (b-x)z \quad \text{d'où} \quad a+x = (b-x)z^2$$

on aura

$$x = \frac{bz^2-a}{z^2+1} \quad a+x = (a+b)\frac{z^2}{z^2+1} \quad b-x = (a+b)\frac{1}{z^2+1}$$

$$dx = 2(a+b)\frac{z\,dz}{z^2+1}$$

$$\int \frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} = \int \frac{2(a+b)^2\frac{z^3dz}{(z^2+1)^3}}{(a+b)\frac{z}{z^2+1}} = 2(a+b)\int \frac{z^2dz}{(z^2+1)^2}$$

L'expression $\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2} = z^2(1+z^2)^{-2}dz$ est de la forme $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ et on trouve que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ sont fractionnaires, de plus m et n sont de mêmes signes et $\frac{p}{q}$ est négatif ; cette expression rentre donc dans le cas de la formule (B) p. 148. Pour l'intégrer par parties on posera.

$$\int z^2(1+z^2)^{-2}dz = -\tfrac{1}{2}\int z\left(-(1+z^2)^{-2}\,2z\,dz\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(z(1+z^2)^{-1} - \int(1+z^2)^{-1}dz\right)$$

$$\int(1+z^2)^{-1}dz = \int\frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang}\, z + C.$$

donc $\int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\text{arc tang}\, z - \frac{z}{1+z^2} + C'\right)$

Remplaçant z par sa valeur en fonction d'x on trouvera. $\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}}\,dx = (a+b)\,\text{arc tang}\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}} - \sqrt{(a+x)(b-x)} + C.$

$$d(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x\,dx) = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$d\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{d\,\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}}{1+\dfrac{a^2-x^2}{x^2}} = \frac{x^2 d\,\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}}{a^2} = -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\int x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \times (-2x\,dx) = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\frac{(a^2-x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -a^2\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

On tire de là les trois intégrales.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}. \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} \quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{2}a^2\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

238.6.

(a) Proposons nous de trouver les conditions d'équilibre ds le cas d'une liaison complète.

Nous aurons

$$\Sigma P\, dS \cos\varepsilon = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

Soit n le nombre des points et

$$L = 0 \quad M = 0 \quad N = 0 \;\ldots$$

les 3n-1 éq. de liaison. Ns aurons en différentiant

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx_1}dx_1 + \ldots = 0$$

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \ldots + \frac{dM}{dx_1}dx_1 + \ldots = 0$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \text{———} \ldots + \frac{dN}{dx_1}dx_1 + \ldots = 0.$$

&c.

Au moyen de ces éq on pourra trouver les valeurs de n-1 différentielles en fonction de dx par ex. et on aura

$$dy = K dx \quad dz = K' dx \;\ldots$$

d'où $\Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = A dx = 0.$

Ainsi l'éq. d'équilibre sera

$$A = 0.$$

On voit par là que lorsque la liaison est complète il n'y a qu'une condition d'équilibre

Mécanique.

1re Leçon.

La Mécanique est la science des forces et les effets qu'elles produisent. Cette science se divise en deux parties; la première qu'on appelle Statique a pour but de découvrir les conditions d'équilibre. La 2de partie qu'on nomme dynamique a pour objet de déterminer le mouvement que prend un solide lorsque les forces qui lui sont appliquées ne se font pas équilibre.

Deux forces sont dites égales lorsqu'étant appliquées au même point et dans des directions opposées elles se font équilibre. Lorsqu'un corps est placé sur un plan horizontal l'équilibre a lieu parceque alors le plan réagit avec une force égale au poids du corps.

Il y a trois choses à considérer dans une force son point d'application, son intensité et sa direction.

Si un corps est en équilibre et qu'on applique à un point quelconque de ce corps un système de forces en équilibre, l'équilibre ne sera pas détruit. Il est aisé de démontrer d'après cela qu'on peut transporter le

point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction pourvu que ce point soit invariablement lié avec le premier.

En effet soit A le pt d'application de la force P et B un pt invariablement liés au point A. j'applique en B deux forces Q S égales toutes deux à la force P et dirigées l'une ds la direction de P et l'autre dans le sens opposé les deux forces se feront équilibre par cons.t l'effet des trois forces P, Q, S sera le même que l'effet de la force P. Mais les deux forces P, Q se détruisent, il ne reste donc plus que la force S équivalente à P.

Lorsque deux forces égales sont appliquées à un même point et dans la même direction elles peuvent être remplacées par une force unique qui est dite double des premières. Trois forces égales seraient remplacées par une force triple. &c. On conçoit d'après cela ce qu'on entend par intensité d'une force et on voit qu'on peut représenter les forces par des nombres ou par des lignes.

La projection d'une ligne droite d'une longueur finie sur une droite située d'une manière quelconque dans l'espace est égale

à la longueur de cette droite multipliée par ~~l'angle~~ le cosinus de l'angle des deux directions. Comme on peut considérer un arc infiniment petit comme se confondant avec la tangente, il s'en suit qu'en représentant par s un arc de courbe on aura

$$dx = ds\cos\alpha \qquad dy = ds\cos\beta \qquad dz = ds\cos\gamma.$$

Soit AMN un élément de surface courbe posons $dv = 2AMN$, α étant l'angle de la normale avec l'axe des z nous aurons

$$2Amn = dv\cos\alpha \qquad \text{or}$$

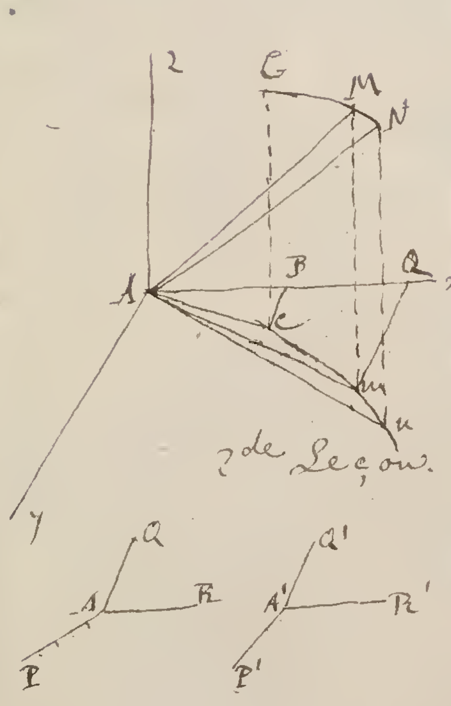
$$2Acm = 2AmQ - 2BCmQ - 2ABC = xy - 2\int y\,dx - 2ABC$$

ABC est constant nous aurons donc en différentiant

$$2d\,ACm = 2Amn = dv\cos\alpha = x\,dy + y\,dx - 2y\,dx = x\,dy - y\,dx$$

donc enfin $dv\cos\alpha = x\,dy - y\,dx$ dernière

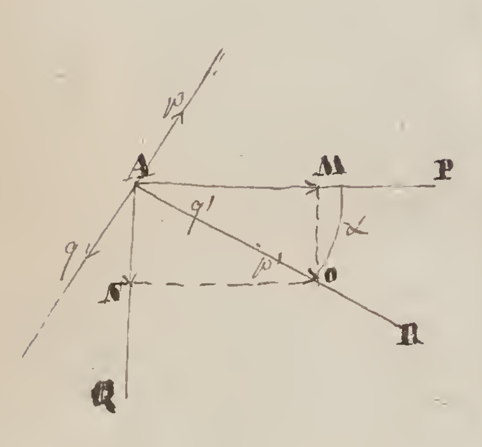
$$dv\cos\beta = y\,dz - z\,dy \qquad dv\cos\gamma = z\,dx - x\,dz.$$



2de Leçon. Si trois forces P, Q, R appliquées au point A se font équilibre, trois forces $P'\,Q'\,R'$ respectivement égales aux 1res appliquées au point A' et faisant entre elles les mêmes angles que les 1res forces se feront encore équilibre. On peut donc transporter le pt A' en A de manière que P' coïncide avec P sans que l'équilibre soit détruit. On pourrait de même

transporter en A un 2^d un troisième système.
Ainsi lorsque plusieurs forces appliquées au même point se font équilibre ; l'équilibre ne sera pas détruit si on augmente toutes ces forces dans un même rapport

De même si les forces P, Q, R se font équilibre les sous multiples de ces forces se feront aussi équilibre. Car si les sous-multiples ne se faisaient pas équilibre les forces elles-mêmes ne pourraient pas se faire équilibre.



Soient P Q deux forces appliquées au point A et dans des directions rectangulaires. Il est évident d'après ce que nous venons de dire que ~~la direction de la résultante et~~ le rapport qui existe entre ~~cette~~ la résultante R et les forces P, Q ne dépendront que de l'angle α, nous aurons donc

$$\frac{P}{R} = f(\alpha) \qquad \frac{Q}{R} = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Or la force P peut se décomposer en deux autres l'une p' dirigée suivant AR l'autre p dirigée suivant une perpend. à AR. Nous aurons

$$\frac{p'}{P} = f(\alpha) = \frac{P}{R}$$

$$\frac{p}{P} = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{Q}{R}$$

$$\frac{q'}{Q} = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{Q}{R}$$

$$\frac{q}{Q} = f(\alpha) = \frac{P}{R}$$

On tire de ces éq.

$$p = \frac{PQ}{R} \qquad q = \frac{PQ}{R}$$

et les forces p et q sont directement opposées elles se détruisent. Ainsi les forces P Q peuvent être remplacées par la somme des forces p' et q'. Par const. la résultante est égale à la somme de ces deux forces c. à d. qu'on a

$$R = p' + q' = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R}$$

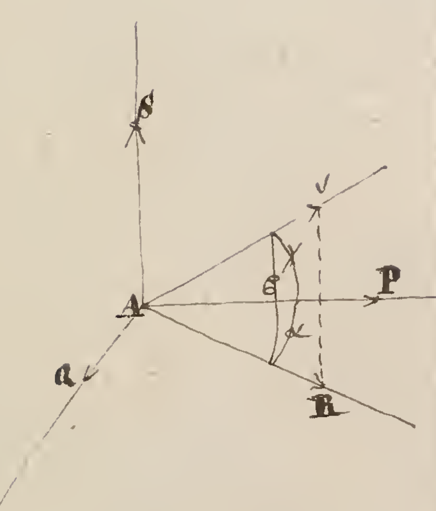
$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

On aura donc

$$R^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AO}^2.$$

c. à d. que la résultante est égale à la diagonale du rectangle.

Il faut démontrer maintenant que la résultante est dirigée suivant la diagonale.



Soit V une force quelconque appliquée au point A, AR la projection de AV, je décompose la force V en deux autres R, S et la force R en deux autres P, Q. On aura

$$\frac{R}{V} = f(\beta) \qquad \frac{P}{R} = f(\alpha).$$

d'où $\frac{P}{V} = f(\alpha) f(\beta)$

Mais $\frac{P}{V} = f(\gamma)$ on aura donc

$$f(\alpha) f(\beta) = f(\gamma)$$

Mais ces fonctions doivent être telles qu'elles ne changent pas lorsqu'on augmente les angles d'un nombre quelconque de circonférences.

On peut donc remplacer ces fonctions par une autre fonction d'une quelconque des lignes trigonométriques. Posons $f(\alpha) = \mathfrak{F}(\cos\alpha)$ nous aurons

$$\mathfrak{F}(\cos\alpha)\,\mathfrak{F}(\cos\beta) = \mathfrak{F}(\cos\gamma)$$

Mais $\cos\alpha \cos\beta = \cos\gamma$ (*)

Donc $\mathfrak{F}(\cos\alpha)\,\mathfrak{F}(\cos\beta) = \mathfrak{F}(\cos\alpha\cos\beta)$

On aura donc d'après cette propriété

$$\mathfrak{F}(\cos\alpha) = \cos^n\alpha \quad \text{ou bien}$$

$$f(\alpha) = \cos^n\alpha$$

Ainsi en remplaçant $f(\alpha)$ par sa valeur

$$\frac{P}{R} = \cos^n\alpha$$

Il reste à déterminer la constante n. Pour cela je remarque que nous avons

$$P^2 + Q^2 = R^2$$

et si on suppose que les forces P Q soient égales entre elles on aura

$$2P^2 = R^2 \qquad P = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad \frac{P}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos^n\alpha$$

Mais puisque les forces sont égales la résultante partage l'angle en deux parties égales on a donc ds ce cas $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \text{d'où} \quad n = 1$$

Nous aurons donc

$$P = R\cos\alpha$$

$$\frac{Q}{R} = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha. \quad \text{d'où}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Mais $\frac{Q}{S} = \frac{MO}{AM} = \text{tang}\, MAO.$

donc $\text{tang}\, \alpha = \text{tang}\, MAO$

Ainsi la direction de la résultante se confond avec la direction de la diagonale du rectangle.

Chaque force est égale à la résultante multipliée par le cos. de l'angle qu'elle fait avec cette résultante.

(✱) Dans tout triangle sphérique ABC (rectangle en C) on a la relation $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta.$

En effet soit O le centre de la sphère. Par le point C je mène deux tangentes. Je mène les lignes OA OB MN. Nous aurons

$$\overline{MN}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{NC}^2 - 2CM.CN\cos C = \overline{MO}^2 + \overline{NO}^2 - 2MO.NO.\cos\gamma.$$

Remplaçant MC NC MO NO par leurs valeurs

$$\text{tang}^2\alpha + \text{tang}^2\beta - 2\,\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta\cos C = \text{séc}^2\beta + \text{séc}^2\alpha - 2\,\text{séc}\,\alpha\,\text{séc}\,\beta\cos\gamma.$$

Mais $\text{séc}^2\beta = 1 + \text{tang}^2\beta.$ Ainsi changeant les signes et divisant par deux

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta\cos C = \text{séc}\,\alpha\,\text{séc}\,\beta\cos\gamma - 1.$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos C}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

d'où $$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Si l'angle C est droit $\cos C = 0$ d'où

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

Soit maintenant V la résultante des trois forces P Q S appliquées au point A et dont les directions sont rectangulaires. Si R est la résultante des forces P et Q, la résultante V des forces R et S sera la résultante des trois forces données. Nous aurons

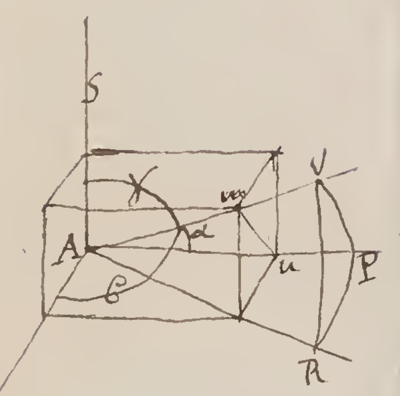
$$P = R \cos RAP \qquad R = V \cos VAR \quad \text{d'où}$$

$$P = V \cos RAP \cos VAR.$$

Mais dans le triangle sphérique rectangle RVP on a la relation

$$\cos RAP \cos VAR = \cos \alpha \quad \text{donc}$$

$$P = V \cos \alpha$$



La ligne mn étant perpend. à AP nous aurons $\cos mAn = \frac{An}{Am}$ ms $\cos \alpha = \frac{P}{V}$ donc $\cos \alpha = \cos mAn$.

On trouverait de même

$$Q = V \cos \beta \qquad S = V \cos \gamma.$$

Ainsi la résultante est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélépipède rectangle.

Il est facile maintenant d'étendre ce que nous venons de dire au cas où les directions des forces ne sont pas rectangulaires.

En effet soient P et Q deux forces quelconques appliquées au point A. Je décompose la force P en deux autres l'une p' dirigée suivant la diagonale AM et l'autre p dirigée

suivant une perpend. à cette diagonale. De même je décompose la force Q en deux autres q, q'. Les deux forces p q étant égales et directement opposées se détruisent. Ainsi la résultante des deux forces P Q est dirigée suivant la diagonale et on a pour sa longueur

$$R = p' + q' = AL' + AN' = AM.$$

Il serait facile d'étendre le théorème au cas de trois forces qui concourent au même point et qui ne sont pas situées dans le même plan.

Dans le cas de deux forces on aurait en nommant θ l'angle de leurs directions

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}.$$

On trouverait pour le parallélépipède

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2 + 2PQ\cos\theta + 2PS\cos\varphi + 2QS\cos\psi}.$$

Conditions d'équilibre d'un point.

Soit un point m placé d'une manière quelconque dans l'espace et concevons ce point sollicité par les forces P P' P'' &c. Menons par le pt m des parallèles aux axes coordonnés. Soit α β γ les angles que la force P fait avec ces axes si on décompose la force P en trois autres dirigées suivant ces axes ses composantes seront

$$P\cos\alpha \quad P\cos\beta \quad P\cos\gamma$$

On décomposerait de même la force P' en trois autres égales à

$$P'\cos\alpha' \quad P'\cos\beta' \quad P'\cos\gamma'$$

ainsi de suite. Or plusieurs forces dirigées suivant une même droite ont une résultante égale à la différence entre la somme de celles qui agissent dans un sens et la somme de celles qui agissent en sens contraire et dirigée dans le sens de la plus grande somme. Mais comme les cosinus changent de signe avec les angles il suffit de prendre la somme algébrique pour avoir la résultante. Nous aurons donc en représentant par X Y Z les forces dirigées suivant les axes des x des y et des z.

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \dots = \Sigma P\cos\alpha$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \dots = \Sigma P\cos\beta$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \dots = \Sigma P\cos\gamma.$$

Au moyen de ces formules on peut remplacer un système quelconque de forces appliquées au même point par trois autres rectangulaires.

Soit a b c les 3 angles que la résultante R de X Y Z fait avec ses composantes nous aurons

$$R\cos a = X \quad R\cos b = Y \quad R\cos c = Z.$$

Ajoutant les carrés nous aurons

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

La direction de R sera donnée par les formules

$$\cos a = \frac{X}{R} \quad \cos b = \frac{Y}{R} \quad \cos c = \frac{Z}{R}$$

On peut trouver R en fonction de P P' P''.
En effet on a

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Remplaçant X Y Z par leurs valeurs

$$R^2 = \Sigma P^2 \cos^2 \alpha + 2 \Sigma P P' \cos \alpha \cos \alpha'$$
$$+ \Sigma P^2 \cos^2 \beta + 2 \Sigma P P' \cos \beta \cos \beta'$$
$$+ \Sigma P^2 \cos^2 \gamma + 2 \Sigma P P' \cos \gamma \cos \gamma'$$

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2 \Sigma P P' (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma')$$

Nommant ε ε' ε'' ... les angles que font entre elles les forces P P', P' P'' ... nous aurons

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2 \Sigma P P' \cos \varepsilon.$$

On peut conclure de cette formule celle que nous avons trouvée pour le parallélépipède.

Pour que le point matériel soit en équilibre il faut qu'on ait $R = 0$ ce qui exige que

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0.$$

Les éq. d'équilibre sont donc

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + \dots = 0$$
$$P \cos \beta + P' \cos \beta' + \dots = 0$$
$$P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + \dots = 0$$

Il faut donc que la somme des projections des forces sur les trois axes soit égale à zéro.

Les conditions que nous venons de donner sont ~~suffisantes~~ nécessaires pour que l'équilibre ait lieu, il faut démontrer qu'elles sont suffisantes. Pour cela on ~~dé~~ décompose les forces données en trois autres dont deux sont dirigées suivant deux des axes et la troisième suivant une ligne quelconque passant par le point matériel. Il suffit de faire voir que la force dirigée suivant cette dernière ligne sera nulle. Soient λ μ ν les angles que cette droite fait avec les axes & et ε ε' ε'' les angles qu'elle fait avec les forces P P' P''... La force dirigée suivant cette dernière ligne sera

$$P\cos\varepsilon + P'\cos\varepsilon' + P''\cos\varepsilon'' + \dots = \Sigma . P\cos\varepsilon .$$

Or nous avons

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$$
$$\cos\varepsilon' = \cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu .$$

&c

Nous aurons donc

$$\Sigma P\cos\varepsilon = \cos\lambda\,\Sigma P\cos\alpha + \cos\mu\,\Sigma P\cos\beta + \cos\nu\,\Sigma P\cos\gamma .$$

Or $\quad \Sigma P\cos\alpha = 0 \quad \Sigma P\cos\beta = 0 \quad \Sigma P\cos\gamma = 0$

Par conséq $\quad \Sigma P\cos\varepsilon = 0 .$ $\quad$ Dc &c.

Lorsque plusieurs forces sont en équilibre autour d'un point une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résul-

tante de toutes les autres. En effet en représentant par $\Sigma P'\cos\alpha'$ la somme des forces dirigée suivant l'axe des x à partir de $P'\cos\alpha'$ nous aurons d'après les conditions d'équilibre

$$P\cos\alpha = -\Sigma P'\cos\alpha' \quad P\cos\beta = -\Sigma P'\cos\beta' \quad P\cos\gamma = -\Sigma P'\cos\gamma'$$

soit R' la résultante des forces P' P''... a' b' c' les angles de R' avec les axes. Nous aurons d'après les relations précédent.

$$\Sigma P'\cos\alpha' = R'\cos a' \quad \Sigma P'\cos\beta' = R'\cos b' \quad \Sigma P'\cos\gamma' = R'\cos c'.$$

D'où on tire

$$P\cos\alpha = -R'\cos a' \quad P\cos\beta = -R'\cos b' \quad P\cos\gamma = -R'\cos c'$$

Ajoutant les carrés nous aurons

$$P^2 = R'^2 \quad \text{d'où} \quad P = R'$$

Donc une force quelconque est égale à la résultante de toutes les autres. Mais puisque $P = R'$ nous aurons

$$\cos\alpha = -\cos a' \quad \cos\beta = -\cos b' \quad \cos\gamma = -\cos c'$$

Les forces P et R' sont donc égales et directement opposées.

3e Leçon. Si le point, au lieu d'être placé libre, est placé sur une surface dont il ne puisse pas s'écarter. Cette surface exercera une réaction équivalante à une force normale à la surface soit N l'intensité de cette force ξ η ζ les angles que la normale fait avec les axes, les conditions d'équilibre seront

$$N\cos\xi + \sum P\cos\alpha = 0$$
$$N\cos\eta + \sum P\cos\beta = 0$$
$$N\cos\zeta + \sum P\cos\gamma = 0.$$

Connaissant l'éq. de la surface on peut déterminer les angles $\xi\ \eta\ \zeta$. En effet soit $L=0$ l'éq. de la surface, qu'on la suppose résolue par rapport à z et qu'on pose

$$\frac{dz}{dx} = p \qquad \frac{dz}{dy} = q$$

d'où $dz = p\,dx + q\,dy$.

Nous aurons en différentiant l'éq. $L=0$ et remplaçant dz par sa valeur

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}(p\,dx + q\,dy) = 0$$

~~Comme x et y sont des~~

ou bien

$$\left(\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dz}p\right)dx + \left(\frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz}q\right)dy = 0$$

Comme x et y sont des variables indépendantes on peut faire varier x seulement et on aura

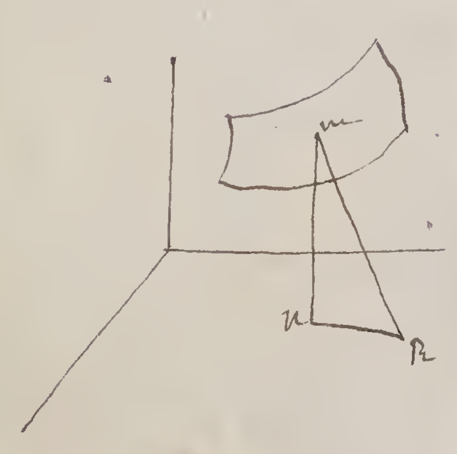
$$\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dz}p = 0 \quad \text{d'où} \quad p = -\frac{\frac{dL}{dx}}{\frac{dL}{dz}}.$$

Faisant varier y

$$\frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz}q = 0 \quad \text{d'où} \quad q = -\frac{\frac{dL}{dy}}{\frac{dL}{dz}}$$

Mais nous avons pour la valeur de la normale

$$mR = \pm z\sqrt{1+p^2+q^2}$$



Substituant et réduisant

$$mR = \pm \frac{z\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}{\frac{dL}{dz}}.$$

Nous aurons donc

$$\cos\zeta = \frac{z}{mR} = \frac{\pm\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

On trouverait de même

$$\cos\xi = \pm\frac{\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}};$$

$$\cos\eta = \pm\frac{\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

Comme ces cosinus sont affectés du signe $\pm$ on ne connait pas le sens dans lequel agit la force normale. On peut poser

$$\frac{1}{\pm\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}} = v.$$

On aura alors

$$\cos\zeta = v\frac{dL}{dz} \quad \cos\xi = v\frac{dL}{dx} \quad \cos\eta = v\frac{dL}{dy}.$$

Les éq. d'équilibre seront alors

$$Nv\frac{dL}{dx} + \Sigma P\cos\alpha = 0$$

$$Nv\frac{dL}{dy} + \Sigma P\cos\beta = 0$$

$$Nv\frac{dL}{dz} + \Sigma P\cos\gamma = 0$$

Si on suppose que le point placé sur la surface ne peut en sortir ni d'un côté ni de l'autre l'équilibre pourra avoir lieu quelle

que soit la direction de la force normale si on élimine N entre les éq. précédentes V disparaîtra aussi, puisque NV peut être considérée cō une seule variable et on n'aura plus que deux éq. entre α, β, γ.

Pour effectuer l'élimination on met les éq. sous la forme

$$NV\frac{dL}{dx} = -\Sigma P\cos\alpha$$

$$NV\frac{dL}{dy} = -\Sigma P\cos\beta$$

$$NV\frac{dL}{dz} = -\Sigma P\cos\gamma.$$

d'où on tire

$$\frac{\frac{dL}{dx}}{\frac{dL}{dz}} = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{\Sigma P\cos\gamma} \qquad \frac{\frac{dL}{dy}}{\frac{dL}{dz}} = \frac{\Sigma P\cos\beta}{\Sigma P\cos\gamma}.$$

Si le Point M est déterminé ces deux éq. donnent les relations qui doivent exister entre α β γ pour qu'il y ait équilibre.

Si au contraire les forces sont déterminées en grandeur et en direction ces deux éq. jointes à l'éq. $L=0$ donneront les coordonnées du point pour lequel l'équilibre aura lieu.

Si le point est simplement placé sur la surface de manière à pouvoir s'en écarter d'un côté, les conditions précédentes ne suffiront pas pour l'équilibre. Nous prendrons alors pour axe des z la normale et nous aurons



par const.

$\zeta=0$ ou $\zeta=\pi$ $\quad \xi=\frac{\pi}{2}$ $\quad \eta=\frac{\pi}{2}$ d'où

$\cos\zeta=\pm 1$ $\quad \cos\xi=0$ $\quad \cos\eta=0$

Les éq. d'équilibre seront donc

$$\Sigma P\cos\alpha=0$$
$$\Sigma P\cos\beta=0$$
$$\pm N+\Sigma P\cos\gamma=0$$

Les deux premières éq. expriment que les forces dirigées dans le plan tangent doivent se détruire. La 3e donne

$$N=\mp\Sigma P\cos\gamma$$

D'où l'on voit que la valeur absolue de N est égale à la force dirigée suivant l'axe des z. Si $\zeta=0$ c.à.d si la force dirigée suivant l'axe des z est dans le sens des z positifs il faudra prendre le signe $-$ c.à.d. que N sera dirigé du côté des z nég. Si au contraire $\zeta=\pi$, la force dirigée suivant l'axe des z agira dans le sens des z nég. et alors N sera positif. Ainsi N est toujours égal et directement opposé à la force qui agit perpendiculairement à la surface.

Considérons maintenant un point donné sur une ligne courbe. Soient $L=0$ $L'=0$ les éq. de la courbe. On peut supposer que le point est à la fois sur les deux surfaces

dont l'intersection donne la ligne courbe alors chacune de ces surfaces pourra être remplacée par une force normale. Soient N N' les deux forces normales, ξ, ξ' η, η'.. les angles qui ces forces font avec les axes. Les conditions d'équilibre seront

$$N \cos\xi + N'\cos\xi' + \sum P\cos\alpha = 0$$
$$N \cos\eta + N'\cos\eta' + \sum P\cos\beta = 0$$
$$N \cos\zeta + N'\cos\zeta' + \sum P\cos\gamma = 0.$$

Posons

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}} \quad V' = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz}\right)^2}}$$

Les éq. précédentes deviendront

$$NV \frac{dL}{dx} + N'V' \frac{dL'}{dx} + \sum P\cos\alpha = 0$$
$$NV \frac{dL}{dy} + N'V' \frac{dL'}{dy} + \sum P\cos\beta = 0$$
$$NV \frac{dL}{dz} + N'V' \frac{dL'}{dz} + \sum P\cos\gamma = 0.$$

Si la position du point sur la courbe est donnée au moyen de ces trois éq. on déterminera NV et $N'V'$ et il restera une éq. de condition qui sera l'éq. d'équilibre.

Si au contraire la position du point n'est pas donnée on aura cinq inconnues les trois coordonnées et les forces N N'. On les déterminera au moyen des trois éq. précédentes et des deux

ég. de la courbe $L=0$, $L'=0$.

On peut simplifier ces ég. en prenant pour axe des x la tangente à la courbe. On a alors

$$\xi=\frac{\pi}{2} \quad \xi'=\frac{\pi}{2}$$

d'où $\cos\xi=0 \quad \cos\xi'=0.$

Et les ég. précédente deviendront

$$\Sigma P\cos\alpha=0$$

$$N\cos\eta+N'\cos\eta'+\Sigma P\cos\beta=0$$

$$N\cos\xi+N'\cos\xi'+\Sigma P\cos\gamma=0.$$

Au moyen des deux dernières ég. on déterminera N et N' et la première sera la condition d'équilibre c.à.d. que la somme des composantes qui agissent suivant la tangente doit être égale à zéro.

Considérons maintenant deux forces P P_1 appliquées aux extrémités de la ligne m m_1. Pour trouver la résultante on prolonge ces forces jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point O. On pourra les supposer appliquées à ce point s'il est invariablement lié aux pts m m_1 et si Op Op_1 représentent les intensités de ces forces Oz représentera leur résultante. On aura donc

$$P:P_1:R=Op:pz:Oz=\sin ROP_1:\sin ROP:\sin POP_1.$$

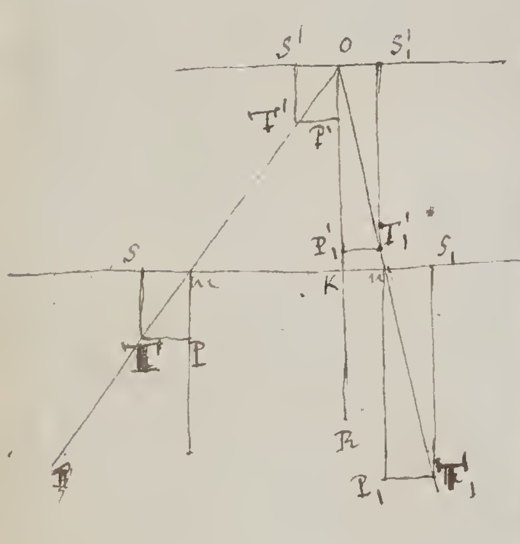
Si par le point z' on abaisse des perp. sur les directions des deux forces et que par le point m on abaisse une perpend. sur OP_1 on aura

$$z's=Oz'\sin POR \qquad z's_1=Oz'\sin P_1OR.$$

Donc

$$P:P_1=z's_1:z's.$$

4e Leçon



On démontrerait de même que le rapport de la résultante à une des composantes est le même que celui des perpend. abaissées d'un point quelconque de la 2de composante sur ces deux forces.

Supposons maintenant que les forces P P₁ soient parallèles appliquées aux points m et n. J'applique aux points m et n deux forces S S₁ égales et directement opposées. Les deux forces P S se composeront en une seule T qu'on pourra transporter en T', de même les forces P₁ S₁ se composeront en une seule T₁ qu'on pourra transporter en T'₁. La force T' pourra se décomposer en deux autres P' S' dirigées l'une suivant une parallèle à P et P₁ et l'autre suivant une parallèle à mn. On aura S' = S P' = P. Décomposant de même la force T'₁ on aura S'₁ = S₁ P'₁ = P₁. Les deux forces S' S'₁ seront égales entre elles et se détruiront il ne restera donc que les deux forces P' P'₁. C. à. d. que la résultante des deux forces parallèles est égale à leur somme et parallèle à leur direction.

Pour trouver le point d'application de la résultante je remarque que nous avons

$$P : S = OS' : S'E' = OK : Km$$
$$P_1 : S_1 = OS'_1 : S'_1E'_1 = OK : Kn.$$

On tire de là, à cause de $S = S_1$

$$P . Km = S . OK = S_1 . OK : P_1 . Kn$$

d'où
$$P : P_1 = Kn : Km$$

C. à. d. que le point d'application de la résultante partage la ligne mn en deux parties inversément proportionnelles aux forces P, P_1.

Pour trouver le point d'application de la résultante on aura en composant la proportion précédente

$$P + P_1 : P_1 = mn : Km$$

d'où
$$Km = \frac{P_1 . mn}{P + P_1}.$$

S
P1
o
m
n
S'
P

Si les deux forces parallèles P P_1 agissent en sens opposé, on pourra sans rien changer à l'effet des forces P P_1 appliquer en un point quelconque o de la droite mn deux forces égales et opposées. Or si ces 2 forces et leur points d'application sont tels qu'on ait

$$P = P_1 + S \quad \text{d'où} \quad S = P - P_1$$

et de plus
$$mo : mn = P_1 : S.$$

la force P sera égale et directement opposée à la résultante des deux autres, les trois forces P, P_1 S seront en équilibre et il ne restera que la force S' qui remplace les deux forces P P_1.

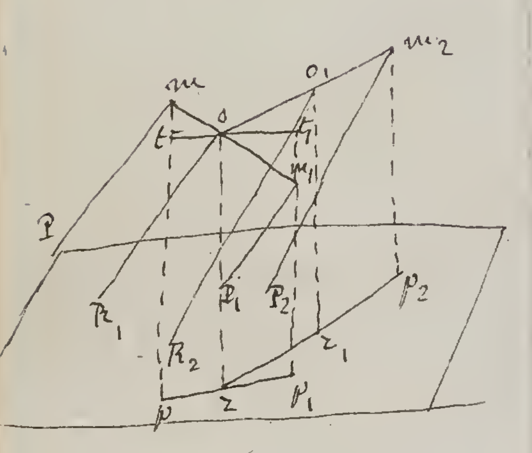
Ainsi lorsque deux forces parallèles sont dirigées en sens contraire leur résultante est égale

à leur ~~résultante~~ différence et dirigée dans le sens de la plus grande.

Pour trouver le point d'application on tire de la proportion précédente

$$mo = \frac{\mathcal{P}_1 \cdot mn}{\mathcal{P} - \mathcal{P}_1}$$

Si les deux forces $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}_1$ sont égales la résultante sera nulle et la ~~deux~~ distance mo sera infinie c.à.d. que deux forces parallèles et agissant en sens contraire n'ont pas de résultante



Soient maintenant plusieurs forces parallèles $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}_1$ $\mathcal{P}_2$ ... situées ou non situées ds le même plan et appliquées à des points invariablement liés entre eux. Soit R_1 la résultante des forces $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}_1$ je projette les points et o son point d'application ; je projette les points m, o, m_1 ... sur un plan quelconques par le point o menant une parallèle à pp_1 nous aurons

$$tm : t_1m_1 = om : om_1 = \mathcal{P}_1 : \mathcal{P}.$$

d'où $\mathcal{P} . tm = \mathcal{P}_1 . t_1m_1$. ou bien

$$\mathcal{P} . mp - \mathcal{P} . oz = \mathcal{P}_1 . oz - \mathcal{P}_1 . m_1p_1$$

d'où on tire

$$\mathcal{P} . mp + \mathcal{P}_1 . m_1p_1 = \mathcal{P} . oz + \mathcal{P}_1 . oz = R_1 . oz.$$

On aurait de même

$$R_1 . oz + \mathcal{P}_2 . m_2p_2 = R_2 . o_1z_1.$$

Donc enfin en représentant par z, z_1 ... les perpend. mp, m_1p_1 ... par R la résultante

-nale et par z' l'ordonnée de son point d'application

$$\Sigma P z = R \cdot z'.$$

Mais une force multipliée par la distance de ~~cette force~~ son point d'applic. à un plan est ce qu'on appelle le moment de cette force par rapport à ce plan, par const.
Le moment de la résultante est égale à la somme des moments des composantes.

Si on suppose les forces rapportées à trois plans coordonnés on aura les quatre éq.

$$\Sigma P z = R z'$$
$$\Sigma P y = R y'$$
$$\Sigma P x = R x'$$
$$\Sigma P = R$$

Au moyen de ces éq. on pourrait déterminer l'intensité de la résultante et son point d'application, mais comme la résultante peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, on a une éq. de trop.

Si nous prenons pour axe des z une droite parallèle aux forces, nous pourrons supposer celles-ci appliquées en des points du plan des xy et le point où la résultante perce ce plan sera donné par les éq.

$$x' = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P} \qquad y' = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}.$$

Pour qu'il y ait équilibre la résultante doit être nulle c.à.d. qu'on doit avoir $\Sigma P = 0$ mais alors x' et y' seraient infinis et comme cela

est impossible on doit avoir aussi $\Sigma Px=0$ $\Sigma Py=0$
Les éq. d'équilibre sont donc

$$\Sigma P=0 \quad \Sigma Px=0 \quad \Sigma Py=0.$$

Si toutes les forces sont situées dans un même plan, on peut prendre l'axe des y parallèle à leur direction. Les éq d'équilibre seront alors

$$\Sigma P=0 \quad \Sigma Px=0.$$

Ces éq. auraient encore lieu si on transportait l'axe des y parallèlement à lui même. Car en remplaçant x par x'-a on aura

$$\Sigma P(x'-a) = \Sigma Px' - a\Sigma P = 0$$

or $\Sigma P=0$ donc $\Sigma Px'=0.$

Proposons nous maintenant de trouver la résultante de plusieurs forces dirigées d'une manière quelconque dans un plan.

Soit P une quelc. de ces forces appliquées au point m, par ce point je mène des parallèles aux axes et je décompose cette force en deux autres $P\cos\alpha$ $P\cos 6$. Au point m j'applique deux forces g et -g ~~dirigé~~ égales et dirigées en sens contraire toutes deux suivant mp

Je compose les deux forces g et $P\cos\alpha$ en une seule R que je suppose appliquée au point O de sa direction et je décompose de nouveau en deux forces g et $P\cos\alpha$. Je suppose de même les forces $P\cos 6$ et -g transportées au point p. En décomposant

de même toutes les autres forces on aura deux systèmes l'un ~~soit~~ dirigé suivant l'axe des x et l'autre perpendiculaire à cet axe pour qu'il y ait équilibre il faut que chacun de ces systèmes soit en équilibre. D'abord pour que les forces dirigées suivant l'axe des x soient en équilibre on doit avoir

$$\Sigma P \cos\alpha = 0.$$

Pour que les forces perpend. à l'axe soient en équilibre on doit avoir d'après ce que ns avons déjà trouvé

$$\Sigma P = 0 \quad \Sigma P x = 0.$$

La 1re de ces deux conditions sera ds ce cas-ci

$$q + P\cos 6 - q + q_1 + P_1 \cos 6_1 - q_1 = \Sigma P \cos 6 = 0.$$

La 2de condition donnera

$$q\,Ao + Px\cos 6 - qx + q_1 Ao_1 + P_1 x_1 \cos 6_1 - q_1 x_1 + \cdots = 0.$$

Pour déterminer Ao ns poserons la proportion

$$q : P\cos\alpha = y : po \qquad \text{d'où}$$

$$po = \frac{Py\cos\alpha}{q} \quad \text{et} \quad Ao = x - \frac{Py\cos\alpha}{q}$$

substituant dans l'éq. précédente nous aurons pour la 2de condition d'équilibre

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos 6) = 0.$$

Les conditions d'équilibre des forces dirigées d'une manière quelc ds un plan sont donc enfin

$$\Sigma P\cos\alpha = 0 \quad \Sigma P\cos 6 = 0 \quad \Sigma P(y\cos\alpha - x\cos 6) = 0.$$

Si ces forces ne sont pas en équilibre en ~~applica~~ ajoutant au point d'application de leur résultante une force égale et directement opposée à cette résultante l'équilibre aura lieu. Ainsi en ajoutant un terme à chacune des éq. précédentes nous aurons

$$-R\cos a + \Sigma P\cos\alpha = 0$$

$$-R\cos b + \Sigma P\cos\beta = 0$$

$$-R(y'\cos a - x'\cos b) + \Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0.$$

x' et y' étant les coordonnées du point d'application de la résultante. On met ordinairement ces éq. sous une autre forme: On pose

$$\Sigma P\cos\alpha = X \quad \Sigma P\cos\beta = Y$$

$$R\cos a\, y' - R\cos b\, x' = \Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = N \text{ ou bien}$$

$$Xy' - Yx' = N$$

Les deux 1res éq. donnent pour la valeur d'R

$$R = \sqrt{X^2+Y^2}$$

La dernière est l'éq. de la droite suivant laquelle la résultante doit être dirigée. Cette éq. se met sous la forme

$$y' = \frac{Y}{X}x' + \frac{N}{X}.$$

Pour avoir le point où cette droite coupe l'axe des y on fait $x'=0$. d'où $y' = \frac{N}{X}$ Si $N=0$ la droite passe par l'origine. Si $Y=0$ la résultante est parallèle à l'axe des x. Pour $X=0$ elle est perpend.

à cet axe. Si on a à la fois $X=0$ $Y=0$ on en conclut $x'=\infty$ $y'=\infty$ et ∞ alors $R=0$ le système se réduit à un couple

5e Leçon.

Nous avons posé

$$N = \sum P(y\cos\alpha - x\cos b)$$

Or si par l'origine on mène une perpend. à la direction de la force P, représentant par p. sa longueur et menant aussi par le point p une perpend à la direction de la force on aura

$$pK = pm\cos\alpha = y\cos\alpha$$
$$pL = x\sin\alpha = x\cos b$$

d'où $\quad LK = p = y\cos\alpha - x\cos b$

l'éq. précédente deviendra donc

$$\sum Pp = N$$

Le produit Pp c.à.d. le produit d'une force par la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur sa direction est le <u>moment</u> de cette force par rapport au point fixe

En représentant par p' la longueur de la perpend. abaissée de l'origine sur la direction de la résultante on aura

$$N = R(y'\cos a - x'\cos b) = Rp'$$

par cons^t

$$\sum Pp = Rp'$$

C.à.d. que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes.

Il faut faire attention lorsqu'on prend la somme des moments qu'on doit compter cō positifs ceux qui tendent à faire tourner le point de gauche à droite et cō négatifs ceux qui tendent à faire tourner de droite à gauche

Si on transporte l'origine en un point quelc. de la résultante son moment devra être égal à zéro et en effet on aura ds. ce cas

$$Xy' - Yx' = N = 0.$$

Si on suppose qu'il y ait un point fixe ~~par l'origine~~, il suffira pour l'équilibre que la résultante passe par ce point. Ainsi en y transportant l'origine il suffira que la résultante y passe c.à.d. que son éq. sera

$$Xy' - Yx' = 0. \qquad d'où$$

$$N = \Sigma P(y\cos a - x\cos b) = 0.$$

Les valeurs de X et de Y donneront la pression du point fixe.

Si l'équilibre n'a pas lieu pour trouver la résultante il faudra ajouter une force S telle qu'on ait

$$Ss + \Sigma Pp = 0.$$

Comme on n'aura que cette éq. pour déterminer S et s on voit qu'on pourra donner à S une infinité de valeurs

Si plusieurs des points du système sont assujettis à rester sur une courbe fixe il suffira pour l'équilibre que la résultante soit normale à cette courbe.

On peut supposer que deux points doivent rester sur une droite le long de laquelle ils peuvent glisser. Si on prend cette droite pour axe des x il suffira pour qu'il y ait équilibre que $\Sigma P \cos\alpha = 0$. Car alors les forces perpend. à l'axe des x sont détruites par la résistance de la droite fixe.

Composition des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

Soit P une quelconque de ces forces appliquée au point m par ce point je mène des parallèles aux axes et je décompose la force P ~~en trois~~ suivant ces lignes en trois autres $P\cos\alpha$ $P\cos\beta$ $P\cos\gamma$ au point n j'applique deux forces parallèles à l'axe des z égales et opposées. Je compose ensuite les forces g et $P\cos\alpha$ en deux autres que je transporte au point o. A ce point je les décompose de nouveau en deux autres g et $P\cos\alpha$. Je transporte de même les forces $-g$ et $P\cos\beta$ au point o' et enfin la force $P\cos\gamma$ au point n.

En décomposant de la même manière les autres forces P_1, P_2... toutes les forces seront ainsi remplacées par deux systèmes l'un situé ds le plan des xy et l'autre perpendiculaire à ce plan. Or si on supposait que le système de points ne pût pas sortir du plan des xy, la résistance de ce plan détruirait les forces normales et il faudrait pour l'équilibre que la résultante des forces dirigées ds le plan fût nulle; par conséquent cette résultante est nulle quand le système est libre et par suite la résultante des forces normales doit aussi être nulle.

Pour exprimer que des forces dirigées ds un même plan soient en équil. nous avons trouvé les trois équations

(1) $\Sigma P\cos\alpha = 0$ (2) $\Sigma P\cos\beta = 0$ (3) $\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0$.

Pour que les forces perpend. au plan des xy soient en équilibre, il faut d'abord que leur somme soit nulle ce qui donne

$$P\cos\gamma + g - g + P_1\cos\gamma_1 + g_1 - g_1 \dots = 0$$

ou bien $\quad \Sigma P\cos\gamma = 0$

Il faut de plus que la somme de leurs moments par rapport à deux plans parallèles à leur direction soit nulle. Nous aurons pour les

La 1re éq. exprime que chacune des forces est multipliée par l'angle que sa direction fait avec l'axe des x. Mais si nous considérons les forces dirigées ds le plan des xy elles sont ici

$P\cos\alpha$, $P_1\cos\alpha_1$, ...

$P\cos\beta$, $P_1\cos\beta_1$, ...

Les 1res sont parallèles à l'axe des x les 2des lui

moments par rapport au plan des zy des forces provenant de la force P

$$Px\cos\gamma + gq_0 - gx.$$

Pour déterminer q_0 nous avons la proportion

$$g : P\cos\alpha = z : n_0 \qquad n_0 = \frac{Pz\cos\alpha}{g}$$

et par suite $g \cdot q_0 = gx - Pz\cos\alpha$.

La somme des moments sera donc

$$Px\cos\gamma - Pz\cos\alpha$$

et par suite la somme totale

$$\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0$$

La somme des moments par rapport au plan des zx des forces provenant de P sera

$$Py\cos\gamma + gy - gp_0'.$$

Mais on a $g : P\cos\beta = z : n_0'$ $\quad n_0' = \dfrac{Pz\cos\beta}{g}$

Ainsi la dernière condition sera

$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0$$

Nous aurons donc enfin pour les conditions d'équilibre des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace

$$(1)\ \Sigma P\cos\alpha = 0 \quad (2)\ \Sigma P\cos\beta = 0 \quad (3)\ \Sigma P\cos\gamma = 0$$

$$(4)\ \Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0$$

$$(5)\ \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0$$

$$(6)\ \Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0.$$

---

sont perpend: Ainsi en multipliant par les cosinus respectifs les 2des forces disparaitront les 1res seront multipliées par un l'éq. (1) restera donc la même. L'éq. (2) exprime que chacune des forces est multipliée par l'angle que sa direction fait avec l'axe des y. Elle restera donc la même comme la précédente.

Enfin dans la dernière éq. $\Sigma Py\cos\alpha$ est la somme des chaque force multipliée par l'ordonnée de son point d'application et par le cos. de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x. Dans le cas qui nous occupe la somme des forces sera

$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots$
$+ P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots$

Les ordonnées des pts d'appl. sont $y_0\ y_1 \ldots$ Les cos. correspondants aux 1res forces sont ceux qui correspondent aux 2des sont 0. Ainsi le terme $\Sigma Py\cos\alpha$ restera le même. Il en serait de même de $\Sigma Px\cos\beta$. L'éq. (3) ne changera donc pas. Ainsi les éq. (1) (2) (3) expriment que les composantes du système dirigées dans le plan des xy sont en équilibre.

Si ds le système il y a un point fixe on pourra prendre ce point pour l'origine. Il faudra encore pour qu'il y ait équilibre que la résultante des forces perpend. au plan des xy soit nulle et que celle des forces dirigées ds le plan des xy le soit aussi. Pour que la 1re de ces deux résultantes soit nulle il faut que la somme des moments des forces par rapport au plan des zx soit nulle ainsi que la somme des moments par rapport au plan des zy. Ce qui donne les deux éq. (4) (5). Ces deux conditions sont suffisantes, car alors, les moments de la résultante par rapport à ces deux plans sont nuls c. à. d. que la résultante doit se trouver sur ces deux plans à la fois et par const. sur l'axe des z. Elle sera donc détruite par la résistance de l'origine. Pour que les forces dirigées ds le plan des xy soient en équilibre il faut que la somme des moments par rapport à l'origine soit nulle, (ce qui donne l'éq. (6)) car alors le moment de la résultante sera aussi nul, c. à. d. qu'elle passera par l'origine. Les conditions d'équilibre d'un système de forces ds l'espace lorsque l'origine est fixe sont donc

$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0$$

$$\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0$$

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0 \qquad (7.)$$

(1) S'il y a ds le système un axe fixe autour duquel le corps puisse tourner sans glisser le long de l'axe, on prendra ~~pour~~ cet axe pour axe des z. Alors l'origine sera fixe par const. les 3 éq (1) (2) (3) seront inutiles. Mais les forces perpend. au plan des xy seront détruites par la résistance de l'axe; il ne restera donc plus que l'éq.

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0.$$

Si le corps peut glisser le long de l'axe des z on aura les deux éq

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0$$

$$\Sigma P\cos\gamma = 0.$$

Il en serait de même pour les autres axes. Ainsi les conditions générales d'équi. expriment que le corps est assujetti par trois axes autour desquels il peut tourner et glisser.

Si les forces ne se font pas équilibre on peut au moyen des éq. précédentes déterminer leur résultante. Pour cela on pose

$$\Sigma P\cos\alpha = X \quad \Sigma P\cos\beta = Y \quad \Sigma P\cos\gamma = Z.$$

$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = L.$$

$$\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = M$$

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = N.$$

Soit R la résultante a, b, c les angles qu'elle fait avec les axes, x' y' z' les coordonnées de son point d'application. En appliquant cette résultante en sens contraire l'équilibre aura lieu on aura donc les éq.

$$-R\cos a + X = 0 \quad -R\cos b + Y = 0 \quad -R\cos c + Z = 0$$

$$-R(z'\cos b - y'\cos c) + L = 0$$

$$-R(x'\cos c - z'\cos a) + M = 0$$

$$-R(y'\cos a - x'\cos b) + N = 0. \quad \text{d'où}$$

$$R\cos a = X \quad R\cos b = Y \quad R\cos c = Z.$$

$$R(z'\cos b - y'\cos c) = L$$

$$R(x'\cos c - z'\cos a) = M$$

$$R(y'\cos a - z'\cos b) = N.$$

Les 3 res donnent

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Connaissant R on pourrait déterminer les angles que la résultante fait avec les axes. Mais

il vaut mieux chercher les éq. de cette résultante
En substituant dans les trois dernières éq. à la place
de $R\cos a$, $R\cos b$, $R\cos c$ leurs valeurs données
par les trois premières, nous aurons

(1) $Yz' - Zy' = L \quad Zx' - Xz' = M \quad Xy' - Yx' = N.$

Ces 3 éq. ne peuvent pas servir à déterminer le
point x', y', z', car elles se réduisent à deux.
En effet multipliant la 1re par X la 2de par
Y et la 3e par Z et ajoutant, on a

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Aussi deux quelconques des 3 éq. étant données
on peut au moyen de cette dernière relation
en déduire la 3e. Si par ex. on donne les
deux 1res on en tirera

$$YZx' - XZy' = LX + MY$$

Mais $\quad LX + MY = -NZ.$

donc $\quad XZy' - YZx' = NZ \quad$ ou enfin

$$Xy' - Yx' = N.$$

L'éq. $LX + MY + NZ = 0$ (A) exprime la
condition pour qu'il y ait une résultante.

6e Leçon.

Si X Y Z ne sont pas nuls à la fois la
résultante ne peut pas être nulle

Si $X = 0$ l'éq. (A) devient alors

$$MY + NZ = 0.$$

La longueur de la résultante est

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Les éq. (1) qui déterminent ~~son éq~~ sa direction deviendront dans ce cas

$$x' = \frac{M}{Z} \quad x' = -\frac{N}{Y} \quad Yz' - Zy' = L.$$

Mais l'éq. $MY + NZ = 0$ donne $\frac{M}{Z} = -\frac{N}{Y}$.
par conséquent les deux 1res éq. se réduisent à une seule. Les éq. de la résultante sont donc

$$x' = \frac{M}{Z} \quad Yz' - Zy' = L.$$

La 1re exprime que la résultante est parallèle au plan des zy.

Si $Y = 0$ les éq. (1) deviennent

$$y' = -\frac{L}{Z} \quad y' = \frac{N}{X} \quad Zx' - Xz' = M$$

Mais ~~or~~ l'éq. (A) devient ds ce cas

$$LX + NZ = 0$$

où en tire $\frac{N}{X} = -\frac{L}{Z}$
Les 2 éq. de la résultante sont donc

$$y' = \frac{N}{X} \quad Zx' - Xz' = M.$$

La résultante est donc parallèle au plan des zx.

Enfin lorsque $Z = 0$ les éq. (1) deviennent

$$z' = \frac{L}{Y} \quad z' = -\frac{M}{X} \quad Xy' - Yx' = N.$$

Mais l'éq. (A) qui est ds ce cas

$$LX + MY = 0$$

donne $\frac{L}{Y} = -\frac{M}{X}$
Les éq. de la résultante sont donc

$$z' = \frac{L}{Y} \quad Xy' - Yx' = N.$$

c. à d. que la résultante est parallèle à l'axe des xy.

Supposons maintenant que deux des forces X, Y, Z soient nulles.

Soient d'abord Y=0, Z=0. La condition pour qu'il y ait équilibre est alors

$$L X = 0$$

et si X n'est pas nulle cette éq. donne L=0. La 1re des éq. (1) est donc identique les deux dernières deviennent

$$z' = -\frac{M}{X} \quad y' = \frac{N}{X}$$

La résultante est donc parallèle à l'axe des x. Si M=0 on aura z'=0 par const. la résultante sera ds le plan des xy. Si N=0 on a y'=0 et la résultante est dans le plan des z x. Si à la fois M=0 N=0 la résultante coïncide avec l'axe des x. Dans le cas où Y=0, Z=0 on a pour la valeur de la résultante R=X.

Supposons que X=0, Z=0. L'éq. de condition pour qu'il y ait une résultante sera M=0. Les éq. de la résultante seront et la grandeur de cette résultante R=Y.

$$z' = \frac{L}{Y} \quad x' = -\frac{N}{Y}$$

Elle est donc parallèle à l'axe des y.

Si on a X=0 Y=0 L'éq. de condition est L

$N=0$. La longueur de la résultante $R=Z$. Ses éq.

$$y' = -\frac{L}{Z} \quad x' = \frac{M}{Z}$$

Elle est donc parallèle à l'axe des z.

Si on a à la fois $X=0$ $Y=0$ $Z=0$ l'éq. (A) est satisfaite et cependant les forces se réduisent à un couple à moins que l'on n'ait en même tems $L=0$ $M=0$ $N=0$, auquel cas les forces sont en équilibre. Ns reviendrons sur ce cas.

Lorsque deux forces ne sont pas dirigées ds le même plan elles n'ont pas de résultante unique.

Soient P et Q les deux forces données. Je suppose que ces deux forces aient une résultante R. Toute force capable de faire équilibre à la force R fera aussi équilibre aux forces P et Q. Mais la force R sera détruite si on conçoit un point fixe A sur sa direction. Elle le sera aussi si par ce point on fait passer une droite fixe AB qui rencontre P et non pas Q. Or cette droite détruira la force P et ne détruira pas la force Q. Un obstacle qui détruit la résultante ne ferait donc pas équilibre aux deux composantes; ce qui est absurde. Donc

Si l'éq. $LX + MY + NZ = 0$ n'est pas satisfaite, les forces n'ont pas une résultante unique. Alors on leur fait équilibre au moyen d'une

force et d'un couple. Pour déterminer cette force et ce couple on conçoit d'abord par l'origine une force S qui fasse avec les axes les angles α_s β_s γ_s. On détermine cette force de manière qu'elle fasse équilibre aux forces X, Y, Z. On aura pour cela les eq.

$$X + S\cos\alpha_s = 0 \quad Y + S\cos\beta_s = 0 \quad Z + S\cos\gamma_s = 0.$$

$$\cos^2\alpha_s + \cos^2\beta_s + \cos^2\gamma_s = 1$$

La force S ainsi déterminée ne change rien aux forces L, M N. En effet les quantités qu'il faudra ajouter à ces forces, lorsqu'on ajoute S au système total seront en nommant x_s y_s z_s les coordonnées d'un point quelconque de la ~~surface~~ force S

pour L ... $S(z_s\cos\beta_s - y_s\cos\gamma_s)$

pour M $S(x_s\cos\gamma_s - z_s\cos\alpha_s)$

pour N $S(y_s\cos\alpha_s - x_s\cos\beta_s)$

Mais nous avons la proportion

$$\cos\alpha_s : \cos\beta_s : \cos\gamma_s = x_s : y_s : z_s$$

d'où $y_s\cos\alpha_s - x_s\cos\beta_s = 0$

$x_s\cos\gamma_s - z_s\cos\alpha_s = 0$

$z_s\cos\beta_s - y_s\cos\gamma_s = 0$

Les quantités qu'on ajoute à L à M et à N sont donc nulles, c. à d. que la force S ne change rien à ces forces.

On peut maintenant trouver un couple qui fasse équilibre aux forces L, M, N sans rien changer à X Y Z. D'abord un couple quelconque ajouté au système ne changera rien aux forces X Y Z. Car en nommant T, U les forces du couple les forces provenant de ce couple qu'il faudra ajouter à X seront,

$$T\cos\alpha_t + U\cos\alpha_u$$

Comme les deux forces du couple sont égales entre elles parallèles et dirigées en sens contraire on a

$$T\cos\alpha_t + U\cos\alpha_u = 0$$

Il en serait de même pour les axes des y et des z.

D'après cela pour déterminer le couple il faudra ajouter des termes à L, à M et à N et on aura

$$L + T(z_t\cos b_t - y_t\cos\gamma_t) + U(z_u\cos b_u - y_u\cos\gamma_u) = 0$$

Mais $T = U$ et $\cos b_t = -\cos b_u$ on aura donc

$$L + T(z_t\cos b_t - y_t\cos\gamma_t) - T(z_u\cos b_t - y_u\cos\gamma_t) = 0$$

ou bien

$$L + T((z_t - z_u)\cos b_t - (y_t - y_u)\cos\gamma_t) = 0.$$

on aurait de même les ég. correspondant à M et à N.

Mais si on représente par h la perpend. commune aux deux forces du couple par

ξ, η, ζ les angles que cette perpend fait avec les axes, par $x_t\ y_t\ z_t$ les coordonnées du point m_t et par $x_u\ y_u\ z_u$ celles du point m_u nous aurons

$$x_t - x_u = h\cos\xi$$

$$y_t - y_u = h\cos\eta$$

$$z_t - z_u = h\cos\zeta$$

substituant ces valeurs dans l'éq précédente nous aurons

$$L + Th(\cos\zeta\cos\beta_t - \cos\eta\cos\gamma_t) = 0$$

On aurait de même

$$M + Th(\cos\xi\cos\gamma_t - \cos\zeta\cos\alpha_t) = 0$$

$$N + Th(\cos\eta\cos\alpha_t - \cos\xi\cos\beta_t) = 0$$

Lagrange a démontré qu'en nommant $\lambda\ \mu\ \nu$ les angles que fait avec les axes la perpendiculaire commune à la ligne h et à une des forces du couple les trois éq précédentes se réduisent à celles ci

$$L + Th\cos\lambda = 0 \quad M + Th\cos\mu = 0 \quad N + Th\cos\nu = 0$$

Nous tirerons de là

$$Th = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

$$\cos\lambda = -\frac{L}{Th} \quad \cos\mu = -\frac{M}{Th} \quad \cos\nu = -\frac{N}{Th}$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Lagrange

Pour cela proposons nous, étant donnés les angles ~~que fait avec~~ α 6 γ que fait avec les axes la droite B et les angles ξ η ζ que fait avec les axes la droite C de trouver les angles λ μ ν que la droite $\mathcal{P}$ perpend. à B et à C fait avec les axes.

Les deux angles $BA\mathcal{P}$ $CA\mathcal{P}$ étant droits ns aurons les éq.

$$(1)\quad \cos\alpha\cos\lambda + \cos 6\cos\mu = -\cos\gamma\cos\nu$$

$$(2)\quad \cos\xi\cos\lambda + \cos\eta\cos\mu = -\cos\zeta\cos\nu$$

$$(3)\qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

Nous tirerons des deux premières éq.

$$\cos\lambda = \frac{\cos\zeta\cos 6 - \cos\eta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\eta - \cos 6\cos\xi}\cos\nu$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\xi\cos\gamma - \cos\alpha\cos\zeta}{\cos\alpha\cos\eta - \cos 6\cos\xi}\cos\nu.$$

On aura donc

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\zeta\cos 6 - \cos\eta\cos\gamma} = \frac{\cos\nu}{\cos\alpha\cos\eta - \cos 6\cos\xi} = \frac{\cos\mu}{\cos\xi\cos\gamma - \cos\alpha\cos\zeta} = K$$

d'où

$$\cos\lambda = K(\cos\zeta\cos 6 - \cos\eta\cos\gamma)$$

$$\cos\mu = K(\cos\xi\cos\gamma - \cos\alpha\cos\zeta)$$

$$\cos\nu = K(\cos\alpha\cos\eta - \cos 6\cos\xi)$$

Substituant ces valeurs ds l'éq. (3) on aura

$$K^2\left[(\cos\zeta\cos 6 - \cos\eta\cos\gamma)^2 + (\cos\xi\cos\gamma - \cos\alpha\cos\zeta)^2 + (\cos\alpha\cos\eta - \cos 6\cos\xi)^2\right] = 1$$

Lorsque l'angle BAC est droit le coefficient de K^2 est égal à l'unité.

En effet en développant ce coefficient, on trouve

$$\cos^2\xi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+\cos^2\eta(\cos^2\alpha+\cos^2\gamma)+\cos^2\zeta(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

$$-2(\cos\xi\cos\beta\cos\eta\cos\gamma+\cos\xi\cos\eta\cos\alpha\cos\zeta+\cos\alpha\cos\gamma\cos\beta\cos\zeta)$$

Mais l'angle BAC étant droit on a

$$\cos\alpha\cos\xi+\cos\beta\cos\eta+\cos\gamma\cos\zeta=0$$

Élevant cette éq. au carré on en tire

$$\cos^2\alpha\cos^2\xi+\cos^2\beta\cos^2\eta+\cos^2\gamma\cos^2\zeta=$$

$$-2(\cos\alpha\cos\xi\cos\beta\cos\eta+\cos\alpha\cos\xi\cos\gamma\cos\zeta+\cos\beta\cos\eta\cos\gamma\cos\zeta)$$

Substituant ds l'expression précédente du coefficient de K^2 et observant que

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

on aura

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta+\cos^2\zeta$$

expression qui est égale à l'unité ; nous aurons donc ds le cas du couple

$$K^2=1 \quad \text{d'où} \quad K=1 \qquad \text{C.q.f.d.}$$

7e Leçon.

D'après ce que nous venons de dire on voit que si X Y et Z sont à la fois égaux à zéro on aura

$$S=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=0$$

et il ne restera plus que le couple. Or ds ce cas, quoique l'éq.

$$LX+MY+NZ=0$$

soit satisfaite, il n'y aura pas de résultante unique à moins que l'on ait en même

tous $L=0$ $M=0$ $N=0$. Auquel cas on a pour la valeur du couple

$$Th=\sqrt{L^2+M^2+N^2}=0$$

c.à.d. qu'il y a équilibre.

Le calcul précédent ne détermine que l'intensité Th du couple sans déterminer les quantités T et h, il suit donc de là que l'effet du couple ne change pas lorsque le produit d'une des forces par la perpend. commune reste le même. De plus on ne détermine que la direction de la perpend. au plan du couple, sans déterminer le point où le plan du couple coupe cette perpend; ni la direction des forces du couple. On peut donc sans changer l'effet d'un couple le faire tourner dans son plan ou le transporter dans un plan parallèle.

— La force qui jointe au couple remplace le système des forces est appliquée à l'origine. Ainsi en prenant divers points pour l'origine on aura autant de systèmes d'une force et d'un couple. Comme on peut supposer que les axes restent toujours parallèles à leur première position la valeur de la force qui est $S=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

restera toujours la même. De plus toutes ses positions seront parallèles entre elles. On peut se proposer de trouver le système pour lequel le couple est un minimum.

Pour cela supposons qu'on ait fait d'abord une première composition qui donne la force S et le couple T', -T' situé ds le plan mn. Soit A le point où la force S coupe le plan et AB la projection de S. Par le pt A je mène AC perpend. à AB, et je change la position du bras de levier du couple de manière qu'il prenne la position CD. Je décompose chacune des forces P, -P en deux autres P, -P parallèles à la force S et Q -Q perpend. aux 1res. J'aurai ainsi remplacé le couple primitif par deux autres P, -P, et Q, -Q. Nous aurons pour les valeurs des forces de ces nouveaux couples, en nommant ε l'angle que fait la force S avec une perpend. au plan MN,

$P = T\sin\varepsilon \qquad Q = T\cos\varepsilon$

$-P = -T\sin\varepsilon \quad -Q = -T\cos\varepsilon$.

Le couple P -P se compose avec la force S et forme une force S' parallèle à S. On aura donc une force et

un couple dont le plan est perpend. à la direction de la force. L'intensité de ce couple sera $Th \cos\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$ est tj. plus petit que l'unité il s'en suit que le couple minimum est celui qui est situé ds un plan perpend. à la direction de la forces

En nommant α β γ les angles de la force S et λ μ ν ceux de la normale avec les axes nous aurons

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

Mais nous avons déjà trouvé

$$\cos\alpha = -\frac{X}{S} \quad \cos\beta = -\frac{Y}{S} \quad \cos\gamma = -\frac{Z}{S}$$

$$\cos\lambda = -\frac{L}{Th} \quad \cos\mu = -\frac{M}{Th} \quad \cos\nu = -\frac{N}{Th}$$

Nous aurons donc

$$\cos\varepsilon = \frac{LX + MY + NZ}{S \cdot Th}.$$

d'où $Th \cos\varepsilon = \dfrac{LX + MY + NZ}{S}$

Pour que le couple soit nul il faut qu'on ait $LX + MY + NZ = 0$. Nous avons déjà trouvé que cette condition est nécessaire pour que le système de forces ait une résultante unique.

Si on a à la fois $X = 0$ $Y = 0$ $Z = 0$ la force S est nulle et le système se

réduit au couple primitif

$$Th = \sqrt{L^2+M^2+N^2}$$

Si en même tems $L=0$ $M=0$ $N=0$ le couple sera nul. Alors le système est en équilibre.

Proposons nous maintenant de trouver quelle est l'éq. de la force S', lorsqu'on a décomposé le système de forces en une force et un couple dont le plan lui est perpendiculaire.

Si nous ajoutons au système de forces un couple $-\frac{LX+MY+NZ}{S}$ égal et directement opposé au couple résultant, le système ainsi augmenté aura pour résultante S! Ce couple étant composé de deux forces égales et opposées ne changera rien à X Y Z. Mais ~~ce le moment d'un couple par rapport à un point pris ds son plan est égal au produit d'une des forces par le bras de levier,~~
Mais nous avons vu ds la leçon précédente que lorsqu'on ajoute au système de forces un couple Th il faut ajouter à L Thcosλ λ étant l'angle que la normale au plan du couple fait avec l'axe des x.

Ici la normale est parallèle à la force S. ainsi le cos. de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x est $-\frac{X}{S}$ - Nous aurons donc

$$(A)\begin{cases} L' = L - \frac{(LX+MY+NZ)X}{S^2} \\ M' = M - \frac{(LX+MY+NZ)Y}{S^2} \\ N' = N - \frac{(LX+MY+NZ)Z}{S^2} \end{cases}$$

Les éq. ~~qui~~ de la résultante seront

$$Yz'-Zy'=L', \quad Zx'-Xz'=M', \quad Xy'-Yx'=N'.$$

La condition

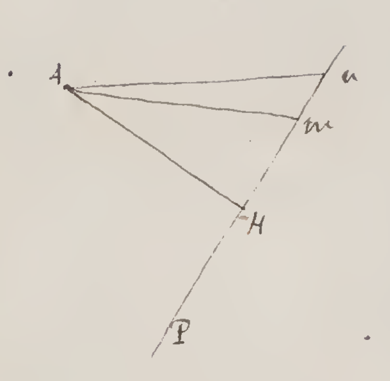
$$L'X+M'Y+N'Z=0$$

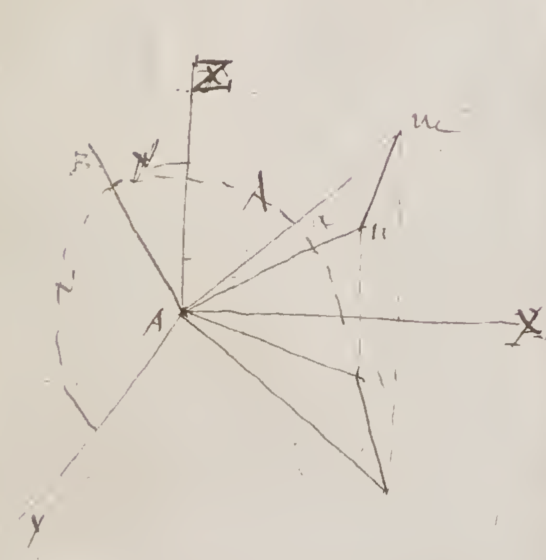
nécessaire pour que les forces aient une résultante sera touj. satisfaite ds ce cas-ci. Car ns ~~aurons~~ tirerons des éq. (A)

$$L'X+M'Y+N'Z=(LX+MY+NZ)\left(1-\frac{X^2+Y^2+Z^2}{S^2}\right)$$

Mais $S^2=X^2+Y^2+Z^2$

donc $L'X+M'Y+N'Z=0.$





Théorie des Moments.

Le moment d'une force est le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur sa direction. Ainsi soit A le point fixe mn une ligne qui représente l'intensité de la force F et AH la perpend. abaissée sur sa direction, le moment de la force F sera F.AH $= mn \cdot AH = 2Amn$. On voit d'après cela que les moment peuvent touj^s être représentés par des surfaces. Ainsi nous allons établir quelques théorèmes sur les aires que pourrons ensuite s'appliquer aux moments

Soit a l'aire d'une surface plane Amn, posons $BAX = \lambda$ $BAY = \mu$ $BAZ = \nu$ représentons par p la projection de a sur le plan des yz par p' la projection sur zx et par p'' la proj. sur xy nous aurons

$p = a \cos\lambda \quad p' = a\cos\mu \quad p'' = a\cos\nu.$

si nous projetons Amn sur un nouveau plan dont la normale fasse avec AB un angle égal à ε nous aurons en représentant par b cette nouvelle projection

$$b = a\cos\varepsilon$$

Mais en nommant α β γ les angles de la normale au nouveau plan avec les axes ns avons

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

d'où $b = \rho\cos\alpha + \rho'\cos\beta + \rho''\cos\gamma.$

Pour d'autres axes a_1 a_2 ... on aurait

$$b_1 = \rho_1\cos\alpha + \rho'_1\cos\beta + \rho''_1\cos\gamma$$

$$b_2 = \rho_2\cos\alpha + \rho'_2\cos\beta + \rho''_2\cos\gamma.$$

~~Faisa~~ Additionnant ces éq. et représentant par B la somme des projections sur le nouveau plan par A A' A''. les sommes des projections sur les plans coordonnés on aura

$$B = A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma. \quad (1)$$

si on prenait deux autres plans de projection rectangulaires au 1er on aurait de même

$$\left.\begin{aligned} B' &= A\cos\alpha' + A'\cos\beta' + A''\cos\gamma' \\ B'' &= A\cos\alpha'' + A'\cos\beta'' + A''\cos\gamma'' \end{aligned}\right\}.(1)$$

cos. α, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$ sont les cos. des angles que l'axe des x fait avec les nouveaux axes coordonnés. ns aurons donc

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1$$

de même pour β et γ. De plus

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0$$

Car cette expression est égale au cos. de l'angle xoy. Nous aurons donc en ajoutant les carrés de ces 3 expressions

$$(M)\quad B^2+B'^2+B''^2=A^2+A'^2+A''^2$$

Au moyen des 3 éq. (1) ~~précédentes~~ on peut trouver les valeurs de A A' A'' en fonction de B B' B''. Pour cela multipliant la 1re par $\cos\alpha$ la 2de par $\cos\alpha'$ la 3e par $\cos\alpha''$ et ajoutant on aura

$$A=B\cos\alpha+B'\cos\alpha'+B''\cos\alpha''$$

Multipliant par $\cos\beta$, $\cos\beta'$, $\cos\beta''$

$$A'=B\cos\beta+B'\cos\beta'+B''\cos\beta''\qquad(2)$$

de même

$$A''=B\cos\gamma+B'\cos\gamma'+B''\cos\gamma''.$$

8me Leçon

On peut donner aux nouveaux plans de projection une position telle que B soit un maximum. On tire de l'éq. (M)

$$B=\sqrt{A^2+A'^2+A''^2-B'^2-B''^2}$$

Pour que B soit un maximum il faut que $B'=0$ et $B''=0$. Le plan sur le quel B est un maximum se nomme le plan principal. Il est perpendiculaire à deux autres sur les quels les sommes des projections sont nulles.

Proposons nous de trouver les angles $\alpha\,\beta\,\gamma$

que la normale au plan principal fait avec les axes.

Lorsque B est un maximum sa valeur est $B = \sqrt{A^2+A'^2+A''^2}$

Les éq. (2) deviennent à cause de $B'=0$ $B''=0$

(3) $A = B\cos\alpha$ $A' = B\cos\beta$ $A'' = B\cos\gamma$ d'où

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}} \quad \cos\beta = \frac{A'}{\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}} \quad \cos\gamma = \frac{A''}{\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}}$$

Si on projette les mêmes aires sur un plan dont la normale fasse avec les axes des angles ξ, η, ζ on aura en représentant par C la somme des projections sur ce plan

$$C = A\cos\xi + A'\cos\eta + A''\cos\zeta$$

Remplaçant A A' A'' par leurs valeurs (3) nous aurons

$$C = \sqrt{A^2+A'^2+A''^2}\cos\varepsilon$$

ε étant l'angle que la normale au plan principal fait avec la normale au nouveau plan de projection. Ainsi les sommes des projections des aires sur différents plans qui font tous le même angle avec le plan principal sont égales.

Si le nouveau plan de projection est perpend. au plan principal on aura $\cos\varepsilon = 0$ et alors la projection sur ce plan sera nulle.

Soit P une force appliqué au point m et représentée par la ligne mc. Nous décomposons la force P en trois autres

$ma = P\cos\alpha$, $mb = P\cos\beta$, $md = P\cos\gamma$.

La ligne m'n' qui est la projection de mc sera égale à la résultante des deux forces $P\cos\alpha$ $P\cos\beta$ transportées dans le plan des xy. Le moment de la force m'n' est égal à la somme des moments des forces m'a' et m'b' c.à.d. égal à $Py\cos\alpha - Px\cos\beta$ puisque les forces tendent à faire tourner le point en sens contraire. Mais le moment de m'n' qui est le double du triangle Am'n' est égal à la projection du moment de la force P. Par conséquent la quantité que nous avons représentée par N est égale à la somme des projections des moments des forces sur le plan des xy. On prouverait de même que M est la somme des projections sur zx et L la somme des projections sur zy.

Il suit de là que nous pourrons appliquer aux quantités L M N les théorèmes qui nous avons établis sur les projections des aires.

Connaissant les quantités L, M, N, en représentant par D la somme des moments des forces décomposées suivant un autre plan dont la normale fait les angles α β γ avec les axes on aura

$$D = L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\gamma.$$

Parmi toutes les positions que peut prendre le nouveau plan de projection il en existe une pour laquelle la somme des moments des forces décomposées suivant ce plan est la plus grande possible, et égale à $\sqrt{L^2+M^2+N^2}$. Par rapport à tout plan perpend. à celui-là la somme des momens est égale à zéro et généralement elle est égale à $\sqrt{L^2+M^2+N^2}\cos\delta$. relativement à un plan qui fait un angle δ avec le plan principal.

Enfin en désignant par α β γ les angles que la perpend. à ce dernier plan fait avec les axes, nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}} \quad \cos\beta = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}} \quad \cos\gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

D'après ce que nous venons de dire on peut énoncer d'une manière fort simple les conditions d'équilibre d'un corps solide.

En effet les trois 1res eq. expriment que les forces décomposées suivant les trois axes sont nulles

Les 3 dernières qui sont $L_1 = 0 \quad M = 0 \quad N = 0$ donnent $\sqrt{L_1^2 + M^2 + N^2} = 0$. Aussi il faut et il suffit pour l'équilibre que le moment principal et la résultante des forces données soient nuls.

Nous avons supposé que le centre des moments est à l'origine. Nous pouvons le transporter en un point quelconque et ensuite y transporter l'origine. Alors le moment principal variera. On peut se proposer de trouver dans quel cas ce sera un minimum.

Soient x' y', z' les coord. nouvelles d'un point quelconque et x_1, y_1, z_1 celles de la nouvelle origine. Nous aurons

$$x' = x - x_1 \qquad y' = y - y_1 \qquad z' = z - z_1$$

Posant $N' = \Sigma P(y' \cos \alpha - x' \cos \beta)$ et substituant à x' y' et z' leurs valeurs nous aurons

$$N' = \Sigma P(y \cos \alpha - x \cos \beta - y_1 \cos \alpha + x_1 \cos \beta)$$

$$= N - \Sigma P(y_1 \cos \alpha - x_1 \cos \beta) \qquad \text{d'où}$$

$$N' = N - X y_1 + Y x_1$$

Nous aurons donc pour le moment principal

$$G' = \sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2} = \sqrt{(L_1 + Z y_1 - Y z_1)^2 + (M + X z_1 - Z x_1)^2 + (N + Y x_1 - X y_1)^2}$$

En cherchant la condition nécessaire pour que

la quantité qui est sous le radical soit un minimum on trouve pour la valeur de G' correspondante

$$G' = \frac{LX + MY + NZ}{S}$$

Si dans le système il y a un point fixe il suffira qu'on ait pour l'équilibre $\sqrt{L^2+M^2+N^2} = 0$ ou bien $L = 0$ $M = 0$ $N = 0$

Les valeurs de X Y Z donneront la pression qu'éprouve le point fixe.

Si un des points est assujeti à rester sur une courbe ~~tangⁱ L=0 M=0~~ il faudra ~~[illegible]~~ que la direction de la résultante soit normale à la courbe. Or en différentiant l'éq. de la courbe nous aurons pour les cos. des angles que la tangente fait avec les axes $\frac{dx}{ds}$ $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$. Mais la direction de la résultante est donnée par les éq

$$Yz' - Zy' = L \quad Zx' - Xz' = M \quad \text{ou bien}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}z' - \frac{L}{Z} \quad x' = \frac{X}{Z}z' + \frac{M}{Z}.$$

Les cos. des angles que cette droite fait avec les axes sont

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \quad \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

La condition pour que la résultante

soit perpend. à la tangente sera donc

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0.$$

Si le point est assujetti à rester sur une surface, il faudra que la résultante soit normale à cette surface. Or les éq. générales de la normale sont

$$x-x'+p(z-z')=0$$
$$y-y'+q(z-z')=0.$$

Pour que la résultante soit normale il faut que l'on ait

$$\frac{X}{Z}=-p \quad \frac{Y}{Z}=-q \quad \text{d'où}$$

$$X+pZ=0 \qquad Y+qZ=0.$$

S'il y a un axe fixe sur lequel le corps puisse tourner et glisser, les conditions d'équilibre seront $Z=0$ $N=0$. Elles se réduiront à $N=0$ si le corps ne peut pas glisser sur l'axe.

Enfin s'il y a 3 points fixes ds le système, on peut prendre le plan de ces trois points pour plan des xy. Les forces parallèles à l'axe des z seront détruites par la résistance du plan. Les conditions d'équilibre seront donc $X=0$ $Y=0$ $N=0$.

Si le corps n'est que posé sur le plan il faut de plus que la résultante des forces parallèles à l'axe des z tende à presser le corps contre le plan. Il faut donc assigner le signe de cette résultante. Il faut de plus qu'elle passe par un point du triangle formé en joignant les trois points fixes.

9me Leçon.

Des centres de Gravité.

Lorsque plusieurs forces parallèles P, P, ... sont appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, si on fait tourner toutes les forces au tour de leurs points d'application de manière qu'elles restent toujs parallèles entre elles ~~mêmes~~, la résultante tournera aussi et elle restera toujours parallèle aux forces. De plus elle passera constamment par un certain point. Ce point est ce qu'on appelle le centre des forces parallèles.

Nommant $x, y, z,$ les coordonnées de ce point, nous aurons d'après le théorème des moments

$$Rx_1 = \Sigma Px \quad Ry_1 = \Sigma Py \quad Rz_1 = \Sigma Pz.$$

d'où $x_1 = \dfrac{\Sigma Px}{\Sigma P}$ $y_1 = \dfrac{\Sigma Py}{\Sigma P}$ $z_1 = \dfrac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$.

Il est évident d'après ces éq. que ce point ne changera pas lorsque les forces ne changeront pas en intensité ou que leurs intensités resteront toujs proportionnelles et qu'elles resteront parallèles ~~entre~~ elles en passant toujs par certains points invariables

Supposons maintenant que le système de points forme un corps solide. Les forces parallèles ~~dont~~ seront remplacées par la pesanteur. On peut supposer le corps composé d'une infinité de parallélépipèdes dont les dimensions sont $dx dy, dz$. Ces parallélépipèdes étant infiniment petits on peut supposer qu'ils sont homogènes, rend en nommant g l'action de la pesanteur sur une molécule (X) ~~dont les~~ ~~coordonnées seraient x y z~~ le poids d'un ~~de ce~~ parallélépipède sera $g\rho\, dx dy dz$. Mais ces différentielles étant infiniment petites leur somme est une intégrale

(X) et ρ le nombre de molécules comprises dans l'unité de volume ~~des parallélépipède~~ $dx dy dz$

Nous aurons donc (ΣP) ~~x~~ $= g\int \rho\, dx dy dz$. puisque g est constant

Par const. les éq. qui donnent le centre des forces parallèles seront

$$x_1 = \frac{g\int^3 x\rho\, dx dy dz}{g\int^3 \rho\, dx dy dz} \quad y_1 = \frac{g\int^3 y\rho\, dx dy dz}{g\int^3 \rho\, dx dy dz}$$

$$z_1 = \frac{g\int^3 z\rho\, dx dy dz}{g\int^3 \rho\, dx dy dz}$$

Si on suppose que le corps est homogène c.à.d. qu'il soit partout également dense ρ sera constant et on pourra l'effacer

en haut et en bas.

Proposons nous d'abord de chercher le centre de gravité G d'une courbe plane BC. Nous supposerons toujours que g est constant. En nommant S la longueur de l'arc nous aurons

$$AH = \frac{\int x\,dS}{S} \qquad GH = \frac{\int y\,dS}{S}.$$

Intégrant par parties nous aurons

$$AH = \frac{xS - \int S\,dx}{S} = x - \frac{\int S\,dx}{S}.$$

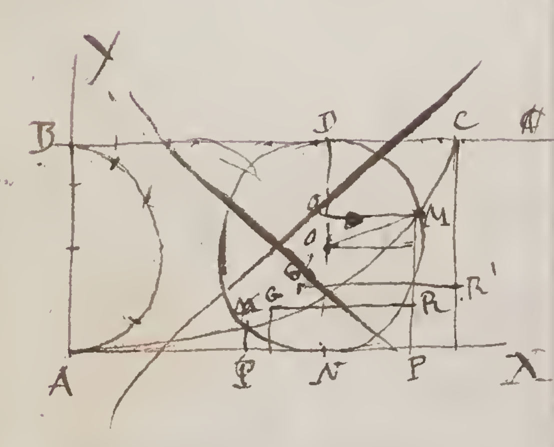
Par conséquent en prenant $AP = x$

$$PH = x - AH = \frac{\int S\,dx}{S}$$

Nous aurons de même

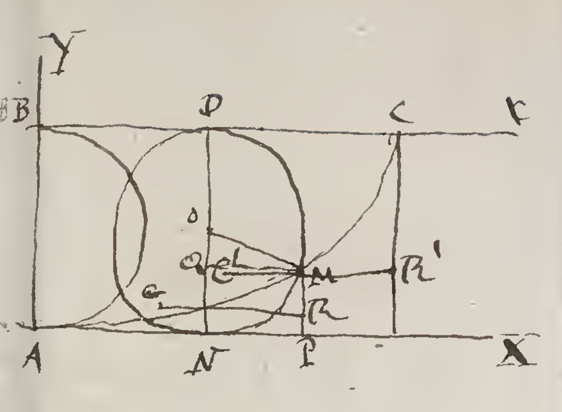
$$GH = \frac{yS - \int S\,dy}{S} = y - \frac{\int S\,dy}{S}$$

d'où $$MR = \frac{\int S\,dy}{S}.$$



Appliquons ces formules à la cycloïde. Soit BC la droite fixe et A le point qui décrit la courbe, a le diamètre du cercle ab. Je suppose que le point A soit venu en M, la ligne BC sera égale à DM, par conséqt. $BD = MN$ et représentant par u l'arc semblable à MN et décrit avec l'unité pour rayon, on aura

$$AP = x = \frac{a}{2}u + \frac{a}{2}\sin u.$$



$$MP = y = \frac{a}{2} - OQ = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos\omega.$$

d'où $u = \arccos \dfrac{\frac{a}{2} - y}{\frac{a}{2}}$ $\quad \sin u = \sqrt{1 - \dfrac{(a-2y)^2}{a^2}}$

et par suite

$$x = \frac{a}{2}\arccos\frac{a-2y}{a} + \frac{1}{4}\sqrt{4ay - 4y^2}$$

$$dx = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{2\,dy}{a}}{\sqrt{1 - \frac{(a-2y)^2}{a^2}}} + \frac{(a-2y)\,dy}{2\sqrt{ay-y^2}}.$$

$$= \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{ay-y^2}} = dy\sqrt{\frac{a}{y} - 1}.$$

d'où $\quad \dfrac{dx}{dy} = \sqrt{\dfrac{a}{y} - 1}.$

Soit G le centre de gravité de l'arc AM. Pour déterminer GR nous avons la formule $GR = \dfrac{\int S\,dx}{S}$. Mais la longueur de l'arc AM est

$$S = \int dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \int dy\sqrt{\frac{a}{y}} = \sqrt{a}\int y^{-\frac{1}{2}}dy = 2\sqrt{ay} + C.$$

Pour $y = 0$ l'arc est zéro par conséquent $C = 0$

et par suite

$$AM = 2\sqrt{ay}.$$

$$S\,dx = 2\sqrt{ay}\,.\,dy\sqrt{\frac{a}{y} - 1} = 2\sqrt{a}\,(a-y)^{\frac{1}{2}}dy.$$

$$GR = \frac{2\sqrt{a}\int(a-y)^{\frac{1}{2}}dy}{2\sqrt{ay}} = ~~[illegible]~~$$

~~[illegible] y = 0 on aura C = [illegible]~~.

Mais nous avons

$$\int(a-y)^{\frac{1}{2}}dy = -\frac{(a-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

Intégrant depuis $y = 0$ jusqu'à $y = y$ on a ~~pour y = a on a C = $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$ donc~~

$$\int(a-y)^{\frac{1}{2}}dy = \frac{2}{3}\left(a^{\frac{3}{2}} - (a-y)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Nous aurons donc

$$GR = \frac{2}{3}\,\frac{a^{\frac{3}{2}}-(a-y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}}.$$

On trouvera de même

$$MR = \frac{\int 2\sqrt{a}\sqrt{y}\,dy}{2\sqrt{a}\sqrt{y}} = \frac{\int y^{\frac{1}{2}}dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}y.$$

Pour le centre de gravité G' de l'arc entier AC on aura

$$CR' = R'G' = \frac{2}{3}a.$$

Cherchons maintenant le centre de gravité d'une surface de révolution. Soit BC la courbe qui décrit la surface. Un point quelconque M dont l'ordonnée est y décrira un cercle dont circonférence égale à $2\pi y$. Une tranche infiniment mince de la surface, qui aura pour base la circonf. décrite par le point M et pour hauteur un élément dS de la courbe, ~~for~~ aura une surface égale à $2\pi y\,dS$. Or le centre de gravité doit évidemment se trouver sur l'axe des x, il suffit donc de déterminer AG et nous aurons.

$$AG = \frac{\int x.2\pi y\,dS}{\int 2\pi y\,dS} = \frac{\int xy\,dS}{\int y\,dS}$$

Ou bien posant

$$\int y\,dS = \int y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int y\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = t.$$

Nous aurons.

$$AG = \frac{\int x\,dt}{t} = \frac{xt-\int t\,dx}{t} = x - \frac{\int t\,dx}{t}.$$

d'où on tire $PG = \frac{\int t dx}{t}$.

Si on veut trouver le centre de gravité de la surface décrite par une cycloïde qui tourne autour de l'axe des x on aura

$$dS = dy\sqrt{\frac{a}{y}} = \sqrt{a}.\, y^{-\frac{1}{2}}dy \quad \text{d'où}$$

$$t = \int y\, dS = \sqrt{a}\int y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{2}{3}\sqrt{a}\, y^{\frac{3}{2}} + C.$$

Faisant $y=0$ on en tire $C=0$ donc

$$t = \frac{2}{3}y\sqrt{ay}.$$

Nous aurons donc

$$PG = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{a}\int y^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{2}{3}\sqrt{a}\, y^{\frac{3}{2}}} = \frac{\int y^{\frac{3}{2}}dx}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais $dx = dy\sqrt{\frac{a-y}{y}}$. Donc

$$PG = \frac{\int y(a-y)^{\frac{1}{2}}dy}{y^{\frac{3}{2}}} \text{ or}$$

$$\int y(a-y)^{\frac{1}{2}}dy = -\frac{2}{3}y(a-y)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int(a-y)^{\frac{3}{2}}dy.$$

$$\int(a-y)^{\frac{3}{2}}dy = -\frac{2}{5}(a-y)^{\frac{5}{2}} + C.$$

Si on intègre depuis $y=0$ on aura $C = \frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}}$

par consé

$$\int y(a-y)^{\frac{1}{2}}dy = \frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15}(a-y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y(a-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Nous aurons donc enfin

$$PG = \frac{\frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15}(a-y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y(a-y)^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

Si on veut avoir le centre de gravité de la surface décrite par l'arc entier AC il faudra faire $y=a$ et on aura

$$P'G' = \frac{\frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{15}a.$$

Pour trouver le centre de gravité d'une aire nous aurons les formules

$$x_1 = \frac{\int^2 x\,dx\,dy}{\int^2 dx\,dy} \qquad y_1 = \frac{\int^2 y\,dx\,dy}{\int^2 dx\,dy}.$$

Si l'aire dont il s'agit est comprise entre la courbe BC dont les ordonnées sont représentées par y'' et la courbe DE dont les ordonnées sont représentées par y' il faudra intégrer depuis y'' jusqu'à y' et on aura

$$x_1 = \frac{\int x\,dx(y''-y')}{\int dx(y''-y')} \qquad y_1 = \frac{\frac{1}{2}\int dx(y''^2 - y'^2)}{\int dx(y''-y')}.$$

Il faudra prendre ces ordonnées entre les abscisses correspondantes aux ordonnées qui terminent la courbe.

10me Leçon.

Proposons nous d'après cela de trouver le centre de gravité de la surface comprise entre l'arc de parabole AOB et la droite AB. L'éq. de la parabole est

$$y''^2 = ax$$

et celle de la droite

$$y' = mx.$$

Égalant les deux valeurs de y nous aurons

$$ax = m^2x^2 \text{ d'où } x = \frac{a}{m^2} \text{ donc}$$

$$AC = \frac{a}{m^2} \text{ et par suite } BC = \frac{a}{m}$$

Substituant à la place de y' et de y'' leurs valeurs ds les formules précédentes nous aurons

$$AH = \frac{\int x(\sqrt{ax} - mx)\,dx}{\int(\sqrt{ax} - mx)\,dx}$$

$$\int x(\sqrt{ax} - mx)\,dx = \sqrt{a}\int x^{\frac{3}{2}} - m\int x^2 dx = \frac{2}{5}\sqrt{a}\,x^{\frac{5}{2}} - \frac{m}{3}x^3.$$

Il faut prendre cette intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x = \frac{a}{m^2}$ ce qui revient à faire $x = \frac{a}{m^2}$ et on aura

$$\frac{2}{5}\,\frac{a^3}{m^5} - \frac{m}{3}\cdot\frac{a^3}{m^6} = \frac{1}{15}\,\frac{a^3}{m^5}.$$

Pour le dénom. us aurons

$$\int(\sqrt{ax} - mx)\,dx = \sqrt{a}\int x^{\frac{1}{2}}dx - m\int x\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{m}{2}x^2.$$

Faisant $x = \frac{a}{m^2}$ on aura

$$\frac{2}{3}\,\frac{x^2}{m^3} - \frac{m}{2}\,\frac{a^2}{m^4} = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{m^3}.$$

Nous aurons donc

$$AH = \frac{1}{15}\,\frac{a^3}{m^5}\cdot\frac{6m^3}{a^2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{a}{m^2} = \frac{2}{5}AC.$$

On trouvera de même au moyen des formules précédentes

$$GH = \frac{1}{2}\,\frac{\int(ax - m^2x^2)\,dx}{\int(\sqrt{ax} - mx)\,dx}$$

$$\int(ax - m^2x^2)\,dx = a\int x\,dx - m^2\int x^2dx = \frac{a}{2}x^2 - \frac{m^2}{3}x^3.$$

Faisant $x = \frac{a}{m^2}$ on aura

$$\frac{a}{2}\,\frac{a^2}{m^4} - \frac{m^2}{3}\,\frac{a^3}{m^6} = \frac{1}{6}\,\frac{a^3}{m^4}.$$

Donc $GH = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\,\frac{a^3}{m^4}\cdot\frac{6m^3}{a^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a}{m} = \frac{1}{2}BC.$

On aurait pu prévoir ce dernier résultat, car toutes les cordes parallèles à AB sont

partagées en deux parties égales par le diamètre qui passe par le milieu de BC.

Soit proposé de trouver le centre de gravité d'un triangle. Prenons le sommet à l'origine et la base ~~qui~~ perpendiculaire à l'axe des x. Soit $y=ax$ l'éq. de la droite AC et $y=bx$ l'éq. de la droite AB. Nous aurons en substituant ~~à la~~ les valeurs générales de x_1 et de y_1 à la place de y'' et de y' leurs valeurs

$$S\,dx(y''-y')=\int(ax-bx)dx=(a-b)\frac{x^2}{2}+c$$

et si nous intégrons depuis $x=0$ jusqu'à $x=Aa=h$ nous aurons

$$(a-b)\frac{h^2}{2}=(ah-bh)\frac{h}{2}=\frac{CB.AO}{2}.$$

$$\int x\,dx(y''-y')=\int x(ax-bx)dx=(a-b)\frac{x^3}{3}+c$$

Intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$ nous aurons

$$(a-b)\frac{h^3}{3}$$

Nous aurons donc

$$x_1=\frac{(a-b)\frac{h^3}{3}}{(a-b)\frac{h^2}{2}}=\frac{2}{3}h.$$

$$\int dx(y''^2-y'^2)=\int(a^2x^2-b^2x^2)dx=(a^2-b^2)\frac{x^3}{3}+c$$

pour $x=h$ $(a^2-b^2)\frac{h^3}{3}$

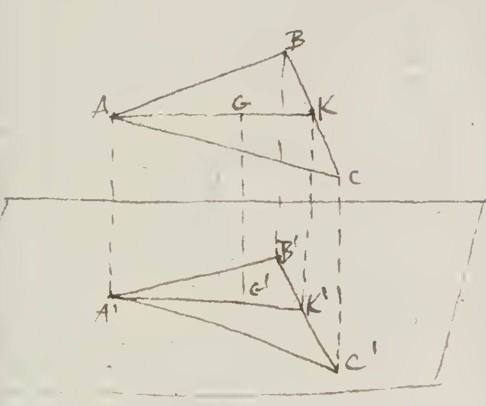
Par consé.

$$y_1=\frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)\frac{h^3}{3}}{(a-b)\frac{h^2}{2}}=\frac{1}{3}(a+b)h=\frac{ah+bh}{3}$$

$$=\frac{OB+OC}{3}=\frac{2}{3}OK.$$

Ainsi prenant $AH = \frac{2}{3} AQ$ joignant le pt A et le pt K milieu de BC le pt G sera le centre de gravité du triangle

Soit ABC un triangle. G son centre de gravité. Je le projette sur un plan quelconque et on aura



$$KK' = \frac{BB' + CC'}{2}$$

$$GG' = AA' + \frac{2}{3}\left(\frac{BB' + CC'}{2} - AA'\right)$$

$$= \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

Ainsi la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur un plan quelconque est égale à la moyenne arithmétique entre les 3 perpend. abaissées des sommets du triangle sur le même plan.

Cherchons le centre de gravité d'un arc de cercle ; pour cela prenons pour axe des x le rayon qui passe par le milieu de cet arc. alors le centre de gravité se trouvera sur cet axe, Nous avons la formule

$$~~x_1 = \frac{\int x\,ds}{S}~~ \quad x_1 = \frac{\int x\,dS}{S}.$$

$$S = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Mais l'éq. du cercle étant $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{d'où}$$

$$S = \pm \int dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Mais lorsque x diminue l'arc augmente

Pour trouver le centre de gravité du secteur AMN on le conçoit partagé en une infinité de petits secteurs qu'on pourra considérer comme des triangles, le centre de gravité de chacun de ces secteurs sera au tiers du rayon si donc avec $AE = \frac{1}{3}AM$ on décrit un arc EI le centre de AMN sera le même que celui de EI. Soit ce centre on aura

$$AG_1 = \frac{AE \times EI}{EHI} = \frac{2}{3}\,\frac{AB.MN}{MBN}$$

Il faut donc prendre le signe moins et nous aurons

$$s = -a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a.\arccos\frac{x}{a} + C.$$

Pour $x=a$ l'arc est zéro nous aurons donc $C=0$.

Nous aurons donc en substituant dans la formule

$$\int x\,ds = -a\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Faisant $x=a$ on a $C=0$. Nous aurons donc

$$x_1 = \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{a.\arccos\frac{x}{a}}.$$

D'où $$AG = \frac{AB.CM}{BM} = \frac{AB.MN}{MBN}.$$

C.à.d. que la distance entre le centre du cercle et le centre de gravité est une quatrième proportionnelle entre l'arc la corde et le rayon.

Si on veut trouver le centre de gravité du segment MBN il suffira de chercher le centre de gravité de BCM, car il est évident que le centre de gravité de MBN se trouve sur l'axe des x à une distance du centre égale à l'abscisse du centre de gravité de BCM.

En représentant par x_1 cette abscisse nous aurons.

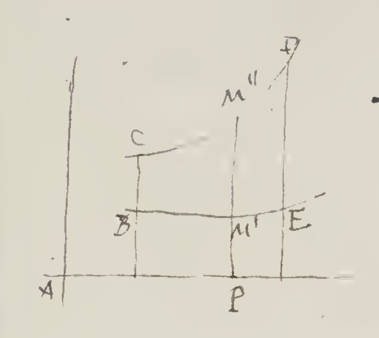
$$x_1 = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\int x\,dx\sqrt{a^2-x^2}}{\int dx\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int x\,dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}\int 2x\,dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Pour $x=a$ $C=0$ nous aurons donc

$$x_1 = \frac{\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{BCM} = \frac{\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{NBM} = \frac{\frac{2}{3}\,CM^3}{NBM}$$

$$= \frac{\frac{1}{12}\,MN^3}{NBM}.$$



Occupons nous maintenant de la recherche du centre de gravité d'un solide de révolution. Soit BCDE la surface qui décrit le solide. La surface décrite par la ligne $M''M'$ sera égale à $\pi(y''^2-y'^2)$. Par const. le solide total sera $\pi\int(y''^2-y'^2)dx$. Nous aurons donc

$$x_1=\frac{\int(y''^2-y'^2)x\,dx}{\int(y''^2-y'^2)\,dx}$$

Supposons que le segment de parabole AOB tourne autour de l'axe des x nous aurons

$$x_1=\frac{\int(ax-m^2x^2)x\,dx}{\int(ax-m^2x^2)\,dx}$$

Nous avons déjà trouvé qu'en prenant l'intégr. jusqu'à $x=AC$ on a

$$\int(ax-m^2x^2)\,dx=\frac{1}{6}\,\frac{a^3}{m^4}.$$

Pour le numérateur nous aurons

$$\int(ax-m^2x^2)x\,dx=a\int x^2dx-m^2\int x^3dx=\frac{ax^3}{3}-\frac{m^2x^4}{4}.$$

Faisant $x=AC=\frac{a}{m^2}$ on aura

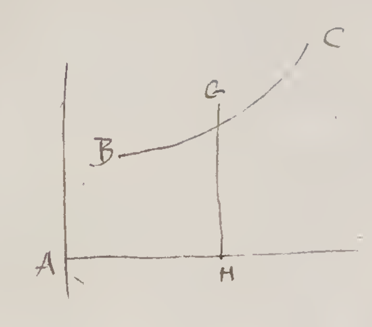
$$\frac{a^4}{3m^6}-\frac{m^2a^4}{4m^8}=\frac{1}{12}\frac{a^4}{m^6}$$

Par const.

$$x_1=\frac{1}{12}\cdot\frac{a^4}{m^6}\cdot\frac{6\,m^4}{a^3}=\frac{1}{2}\,\frac{a}{m^2}=\frac{1}{2}AC.$$

Théorème de Guldin. Soit BC une courbe qui décrit une surface de révolution en tournant autour de l'axe des x. La surface ainsi

engendrée sera égale à $2\pi\int y\,dS$. Mais nous avons trouvé $GH = \frac{\int y\,dS}{S}$. Donc



$$\text{aire } BC = 2\pi\, GH \cdot S.$$

C.à.d. que la surface engendrée par une courbe est égale à la circonférence décrite par son centre de gravité multipliée par la longueur de cette courbe.

Si la courbe au lieu de décrire une circonférence entière décrit un arc dont la longueur soit φ la surface engendrée serait égale à $\varphi\int y\,dS$. on aura

$$\text{aire } BC = \varphi\, GH \cdot S.$$

11me Leçon.

Soit BCDE une surface qui décrit un solide de révolution. Ce solide sera égal à

$$\pi\int(y''^2 - y'^2)\,dx.$$

La surface BCDE est égale à

$$\int(y'' - y')\,dx.$$

Mais si le centre de gravité est en G on aura

$$GH = \frac{1}{2}\,\frac{\int dx(y''^2 - y'^2)}{\int dx(y'' - y')}$$

Par const.

$$\text{sol. } BCDE = 2\pi\, GH \cdot BCDE.$$

C.à.d. qu'un solide de révolution est égal à la surface qui l'engendre multipliée par la circonf. décrite par le centre de gravité de cette surface.

Si la surface décrit un arc égal en longueur à φ on aura

$$\text{vol. } BCDE = \varphi\, GH \cdot BCDE$$

~~On demande le centre de gravité de l'aire BCD. L'éq. de la sphère est~~

~~$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$ celle du cylindre est~~

~~$$z^2 = ax - x^2$$~~

~~L'éq. de la projection sur le plan des xy de la courbe d'intersection sera~~

~~$$x^2 + y^2 + ax - x^2 = a^2 \quad \text{ou bien} \quad y^2 = a(a-x)$$~~

Soit proposé de trouver le centre de gravité d'une surface ds l'espace. En posant

$\frac{dz}{dx} = p \quad \frac{dz}{dy} = q$ la formule qui donne l'étendue ~~de~~ la surface est

$$\int^2 dx\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}$$

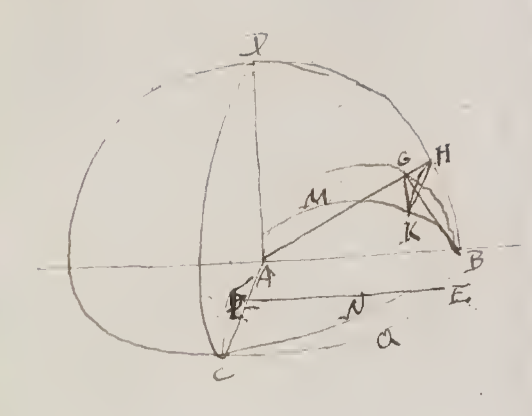
Ns aurons donc pour les coordonnées du centre de gravité.

$$x_1 = \frac{\int^2 x\,dx\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}}{\int^2 dx\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$y_1 = \frac{\int^2 y\,dx\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}}{\int^2 dx\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$z_1 = \frac{\int^2 z\,dx\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}}{\int^2 dx\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Appliquons ces formules à la recherche du centre de gravité de l'aire BCD.



L'éq. de la sphère est

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

celle du cylindre est

$$z^2=ax-x^2$$

Ainsi l'éq. de la projection sur le plan des xy de la courbe d'intersection sera

$$x^2+y^2+ax-x^2=a^2 \quad \text{ou bien} \quad y^2=a(a-x)$$

Or de l'éq. de la sphère on tire

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

Donc

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

$$\int^2 dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}=a\int dy\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=a\int dy\left(\text{arc sin}\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}+c\right)$$

Il faut prendre cette intégrale depuis x = o l'abscisse de BC jusqu'à x = a. Nous aurons donc

$$a\int dy\left(\text{arc sin}\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right)=a\int dy\,\text{arc cos}\frac{y}{a}.$$

$$=ay\,\text{arc cos}\frac{y}{a}+a\int y\frac{\frac{dy}{a}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}=$$

$$ay\,\text{arc cos}\frac{y}{a}+a\int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=$$

$$ay\,\text{arc cos}\frac{y}{a}-a\sqrt{a^2-y^2}+C.$$

Pour y = o l'intégrale est nulle nous aurons donc $C=a^2$ et par suite

$$\int^2 dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}=ay\,\text{arc cos}\frac{y}{a}-a\sqrt{a^2-y^2}+a^2.$$

comme on doit prendre cette intégrale

jusqu'à $y=a$ on aura pour la surface

$$BMCD = a^2.$$

Pour le numérateur de la valeur de z_1 nous aurons

$$\int^2 z\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = a\int^2 dx\,dy = a\int dy\frac{(a^2-y^2)}{a} = a^2y - \frac{y^3}{3}$$

faisant $y=a$ on a $a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$ par conséquent

$$z_1 = \frac{2}{3}a^3 : a^2 = \frac{2}{3}a.$$

D'après cela si on voulait avoir le centre de gravité de la surface totale de la sphère percée par deux cylindres, cet centre se trouverait également sur le rayon AD aux $\frac{2}{3}$ à partir du centre.

Cherchons les autres coordonnées du centre de gravité du quart de sphère creusé par le cylindre. Pour le numérateur de la valeur de x_1 nous aurons

$$\int^2 x\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = a\int dy\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = a\int dy\left(c - \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)$$

On doit prendre l'intégrale entre $x=0$ et $x = \frac{a^2-y^2}{a}$ nous aurons donc

$$a\int dy\left(\sqrt{a^2-y^2} - \sqrt{a^2-y^2-\frac{(a^2-y^2)^2}{a^2}}\right) =$$

$$\int dy\left(a\sqrt{a^2-y^2} - \sqrt{a^2(a^2-y^2)-(a^2-y^2)^2}\right)$$

$$= \int dy\left(a\sqrt{a^2-y^2} - \sqrt{(a^2-y^2)y^2}\right)$$

$$= a\int dy\sqrt{a^2-y^2} - \frac{1}{2}\int 2y\,dy\sqrt{a^2-y^2}$$

$$= a\int dy\sqrt{a^2-y^2} + \frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Mais en représentant par x les ordonnées du cercle BQC on a $x=\sqrt{a^2-y^2}$ d'où

$$\int dy\sqrt{a^2-y^2} = \int x dy = ABEF.$$

Par conséq.

$$\int^2 x dx dy\sqrt{1+p^2+q^2} = a.ABEF + \frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Lorsqu'on fait $y=0$ la surface se réduit à zéro la surface ABED se réduit aussi à zéro on a donc

$$C = -\frac{1}{3}a^3.$$

et par suite

$$\int^2 x dx dy\sqrt{1+p^2+q^2} = a.ABED + \frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}a^3.$$

Pour avoir l'intégrale totale il faut faire $y=a$ et on aura

$$\frac{\pi . a^3}{4} - \frac{1}{3}a^3 =$$

Nous aurons donc

$$x_1 = a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

Si on prend pour π $\frac{22}{7}$ on aura

$$x_1 = a\left(\frac{11}{14} - \frac{1}{3}\right) = \frac{19}{42}a.$$

Pour la valeur de y_1 nous aurons

$$\int^2 y dx dy\sqrt{1+p^2+q^2} = a.\int y dy \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= a\int y dy \left(\arc \sin \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C\right)$$

Intégrant depuis $x=\frac{a^2-y^2}{a}$ jusqu'à $x=0$ nous aurons

$$a\int y dy \arc \sin \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a} = a\int y dy \arc\cos \frac{y}{a}$$

$$= a\left(\frac{1}{2} y^2 \arc\cos \frac{y}{a} + \frac{1}{2}\int y^2 \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \int y \frac{y dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = -y\sqrt{a^2-y^2} + \int dy\sqrt{a^2-y^2}$$

$$= -y\sqrt{a^2-y^2} + \int \frac{dy(a^2-y^2)}{\sqrt{a^2-y^2}} =$$

$$-y\sqrt{a^2-y^2} + a^2\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} - \int\frac{y^2 dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

$$\int\frac{y^2 dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = -\frac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + \frac{1}{2}a^2\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

$$= -\frac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arc\,cos}\frac{y}{a}$$

Nous aurons donc en substituant

$$\int^2 y\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = a\left[\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}a^2\right)\operatorname{arc\,cos}\frac{y}{a} - \frac{1}{4}y\sqrt{a^2-y^2} + c\right].$$

Lorsqu'on fait $y=a$ le 1r membre est nul nous avons donc $c = \frac{1}{8}\pi a^2$. Substituant à la place de c cette valeur et faisant ensuite $y=a$ ns aurons.

$$\int y\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{8}\pi a^3.$$

et par conséquent

$$y_1 = \frac{1}{8}\pi a^3 : a^2 = \frac{1}{8}\pi a.$$

Prenant pour π $\frac{22}{7}$ nous aurons $y_1 = \frac{11}{28}a$.

12.me Leçon. La courbe d'intersection du cylindre et de la sphère est telle que pour un point quelc. de cette courbe la longitude est égale à la latitude; lorsqu'on prend le point C pour pôle et l'arc BD pour méridien

En effet si par un point quelc. K de la courbe BKC et par le rayon AC on fait passer un plan ce plan coupera la

sphère suivant le cercle HK. Par le point B abaissant une perpend. sur AH cette perpend. tombera au point G. Si par le point K on abaisse une perpend. sur le plan des 2 x cette perpend. tombera sur le cercle AB et par conséq. au point G on aura donc

$$AG = a \cos BH = a \cos KH \text{ d'où } BH = KH.$$

Passons à la recherche des centres de gravité des solides de l'espace.

Pour trouver le centre de gravité d'un quart d'ellipsoïde il faut d'abord connaître le centre de gravité d'un quart d'ellipse. — L'éq. d'une ellipse est

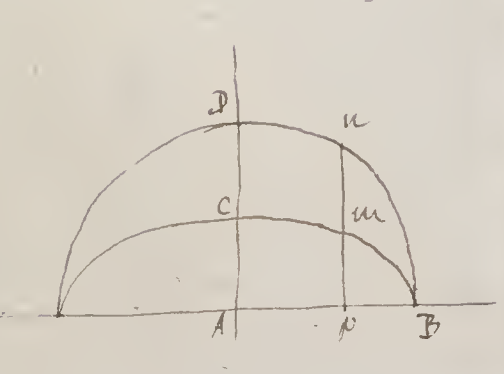
$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \text{ d'où } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Nous aurons donc pour la surface

$$S^2dxdy=Sdx(y+c)$$

Intégrant depuis $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ jusqu'à $y=0$ nous aurons

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2}$$



Mais $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$ est égal à la portion de cercle ApnD nous aurons donc

$$ACmB=\frac{b}{a}ADnp. \quad \text{d'où}$$

$$ACmp=\frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi ab}{4}.$$

L'ellipse entière a pour surface $\pi ab=\pi z^2$ en représentant par z une moyenne proportionnelle entre les deux axes.

Pour déterminer le centre de gravité du quart d'ellipse nous aurons

$$\frac{b}{a}\int x\,dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{b}{2a}\int 2x\,dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{b}{3a}\left((a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+c\right)$$

Le 1er membre est nul pour $x=0$ nous avons donc $c=-a^3$. Substituant cette valeur dans l'intégrale précédente et faisant $x=a$ on trouve $\frac{ba^2}{3}$. Nous aurons donc $x_1 = \frac{ba^2}{3} : \frac{\pi ab}{4} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$.

On trouverait de même $y_1 = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}$.

Cherchons maintenant le centre de gravité d'une portion d'ellipsoïde. Son eq est

$$a^2b^2z^2+a^2c^2y^2+b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2.$$

Si on suppose que z soit constant on aura pour l'eq d'une section parallèle au plan des xy

$$a^2c^2y^2+b^2c^2x^2 = a^2b^2(c^2-z^2)$$

Les axes de cette ellipse seront

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2} \qquad b' = \frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}.$$

La surface de cette ellipse sera

$$\int^2 dx\,dy = \pi a'b' = \frac{\pi ab}{c^2}(c^2-z^2)$$

Or pour déterminer le centre de gravité d'un solide nous avons la formule

$$z_1 = \frac{\int^3 z\,dx\,dy\,dz}{\int^3 dx\,dy\,dz} = \frac{\int z\,dz\int^2 dx\,dy}{\int z\int^2 dx\,dy}$$

Substituant on aurait

$$z_1 = \frac{\frac{\pi ab}{c^2}\int z dz (c^2 - z^2)}{\frac{\pi ab}{c^2}\int dz (c^2 - z^2)} = \frac{\frac{c^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} + C}{c^2 z - \frac{z^3}{3} + C'}$$

Prenant l'intégrale entre $z = \alpha$ et $z = \beta$

on aurons

$$z_1 = \frac{\frac{c^2}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{1}{4}(\alpha^4 - \beta^4)}{c^2(\alpha - \beta) - \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(c^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)(\alpha^2 - \beta^2)}{\left(c^2 - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\right)(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{1}{2}\left(c^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)(\alpha + \beta)}{c^2 - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}$$

Il est évident que le centre de gravité doit se trouver sur l'axe des z par cons.t cette valeur suffit pour le déterminer.

Si on veut avoir le centre de gravité de la moitié de l'ellipsoïde il faudra faire $\beta = 0$ $\alpha = c$ ce qui donne

$$\frac{\frac{1}{2}(c^2 - \frac{1}{2}c^2)c}{c^2 - \frac{1}{3}c^2} = \frac{3}{8}c.$$

Comme les axes a et b n'entrent pas dans la valeur de z_1 cette valeur sera la même quels que soient les axes. Si on suppose $a = b = c$ l'ellipsoïde deviendra une sphère et la formule précédente donnera le centre de gravité d'une calotte sphérique.

Le volume d'une portion d'ellipsoïde compris entre deux plans dont les éq. sont

$z=\alpha$ $z=\mathcal{C}$ sera égal au dénominateur de la 1re valeur de z_1 multipliée par $\frac{\pi ab}{c}$ c. à. d. qu'on aura pour ce volume

$$\frac{\pi ab}{c^2}\left(c^2(\alpha-\mathcal{C}) - \frac{1}{3}(\alpha^3-\mathcal{C}^3)\right)$$

Si on prend ce volume depuis $\mathcal{C}=o$ jusqu'à $\alpha=c$ nous aurons pour le volume de la moitié de l'ellipsoïde $\frac{2}{3}\pi abc$ et par suite pour le volume de l'ellipsoïde entier $\frac{4}{3}\pi abc$ Or bien en posant $R=\sqrt[3]{abc}$ nous aurons pour ce volume $\frac{4}{3}\pi R^3$. C. à. d. que le volume d'une ellipsoïde est égal à celui d'une sphère dont le rayon est la racine cubique du produit des trois demi-axes

13me Leçon. Cherchons le centre de gravité d'une pyramide. Soit b la surface de la base h la hauteur. Coupons cette pyramide par un plan parallèle à celui de la base et distant de ce plan d'une quantité égale à z. Nommons Z la surface de la section nous aurons

$$h^2 : (h-z)^2 = b : Z \qquad Z = \frac{b(h-z)^2}{h^2}$$

Nous aurons donc en prenant le plan de la base pour plan des xy

$$z_1 = \frac{\int zZdz}{\int Zdz} = \frac{\frac{b}{h^2}\int (h-z)^2 zdz}{\frac{b}{h^2}\int (h-z)^2 dz}.$$

Intégrant le numérateur par parties nous aurons

$$\int (h-z)^2 z\,dz = -\frac{(h-z)^3}{3} z + \int \frac{(h-z)^3}{3} dz$$

$$= C - \frac{(h-z)^3}{3} z - \frac{(h-z)^4}{3.4}$$

Cette valeur doit être nulle pour $z=0$ nous avons donc $C = \frac{h^4}{3.4}$. Le numérateur de la valeur de z_1 est donc

$$\frac{h^4}{3.4} - \frac{(h-z)^3}{3} z - \frac{(h-z)^4}{3.4}.$$

Le dénominateur est $C - \frac{(h-z)^3}{3}$. Cette quantité doit être nulle pour $z=0$ nous avons donc $C = \frac{h^3}{3}$. Or pour avoir la valeur de z_1 il faut intégrer depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$ nous aurons donc

$$z_1 = \frac{\frac{h^4}{3.4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{h}{4}$$

Ainsi le centre de gravité se trouve sur un plan parallèle à la base et qui passe par le $\frac{1}{4}$ de la hauteur. Mais la ligne qui passe par le sommet et le centre de gravité de la base passe par le centre de gravité de toutes les tranches, ainsi le centre de gravité de la pyramide se trouve au point où cette ligne coupe le plan que nous venons de déterminer. (a)

Lorsqu'une courbe est donnée par les deux éq.

$$x = F(z) \qquad y = f(z)$$

La formule qui donne la longueur de cette courbe est

$$\int dz \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

Nous aurons donc pour les coordonnées du centre de gravité.

$$x_1 = \frac{\int x\,dz \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}{\int dz \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}$$

$$y_1 = \frac{\int y\,dz \sqrt{1 - \quad -}}{\int dz \sqrt{\quad}}$$

$$z_1 = \frac{\int z\,dz \sqrt{\quad}}{\int dz \sqrt{\quad}}$$

Appliquons ces formules à l'hélice

(a) Proposons nous de trouver le centre de gravité de la portion de sphère AFCG. Si on suppose ce solide composé d'une infinité de petites pyramides chacune de ces pyramides aura son centre de gravité à une distance du centre égale à $\frac{3}{4}a$, a étant le rayon de la sphère. Ainsi prenant $AB = \frac{3}{4} AC$ le centre de gravité du solide AFCG sera le même que celui de la surface EBH c.à.d. au point O milieu de BD.

Nous aurons pour déterminer ce centre de grav.

$$AO = \frac{AD+AB}{2} = \frac{\frac{3}{4}(x+a)}{2} = \frac{3}{8}(x+a)$$

Pour la $\frac{1}{2}$ sphère il faut faire $x = 0$ et on a $\frac{3}{8}a$ ce que nous avions déjà trouvé

Nommons a le rayon de la base du cylindre sur lequel l'hélice est décrite et θ l'angle KAN'. Ns aurons $KN' = a\theta$; h étant le pas de la vis on aura

$$2\pi a : a\theta = h : M'N' \quad d'où \quad y = \frac{h\theta}{2\pi}.$$

$\frac{h}{2\pi}$ est l'abscisse qui correspond à l'unité d'angle. Posons $\frac{h}{2\pi} = b$ ns aurons

$$z = b\theta \quad d'où \quad \theta = \frac{z}{b}$$ et par conséquent les éq. de l'hélice seront

$$x = a \sin \frac{z}{b} \quad y = a \cos \frac{z}{b}.$$

Si de chacun des points de l'hélice on abaisse des perpendiculaires sur l'axe on engendrera une surface nommée hélicoïde. Cette surface est composée d'une infinité d'hélices qui ne diffèrent entre elles que par le rayon a. Aussi éliminant a entre les deux éq. précédentes ns aurons pour l'éq. de l'hélicoïde

$$z = b \cdot \text{arc tang} \frac{x}{y}$$

Pour trouver le centre de gravité d'un arc de l'hélice, il faut d'abord trouver la formule qui donne la longueur d'un arc. Ns aurons pour cela en différentiant les éq.

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a}{b} \cos \frac{z}{b} \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{a}{b} \sin \frac{z}{b}$$

et par suite pour la longueur de l'arc

$$\int dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}=\int dz\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$

Intégrant depuis $z=z'$ jusqu'à $z=z''$ nous aurons

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}(z''-z')$$

D'après cela nous aurons

$$x_1=\frac{\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}\int\sin\frac{z}{b}dz}{\int dz\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}}=\frac{ab\left(\cos\frac{z'}{b}-\cos\frac{z''}{b}\right)}{z''-z'}$$

$$y_1=\frac{\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}\int\cos\frac{z}{b}dz}{\int dz\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}}=\frac{ab\left(\sin\frac{z''}{b}-\sin\frac{z'}{b}\right)}{z''-z'}$$

$$z_1=\frac{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\int z\,dz}{\int dz\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}}=\frac{\frac{1}{2}(z''^2-z'^2)}{z''-z'}=\frac{1}{2}(z''+z')$$

Ainsi le centre de gravité d'un arc d'hélice se trouve sur un plan distant du plan des xy d'une quantité égale à la demi somme des ordonnées extrêmes.

Si l'arc se compte à partir du point K et qu'il ait un nombre exact de spirales on aura $z'=0$ $z''=2b\text{K}\pi$ d'où on tire

$\sin\frac{z'}{b}=0$ $\cos\frac{z'}{b}=1$, $\sin\frac{z''}{b}=0$ $\cos\frac{z''}{b}=+1$ et par suite $x_1=0$ $y_1=0$ $z_1=b\text{K}\pi$. Ainsi ds ce cas le centre de gravité se trouve sur l'axe au milieu de la hauteur.

On pourrait trouver le centre de gravité de l'hélicoïde en supposant cette surface rapportée aux coordonnées rectangulaires. Mais les calculs seraient très compliqués. Pour y parvenir plus simplement on rapporte la surface à des coordonnées polaires. Nous verrons le calcul dans la leçon suivante.

14me Leçon.

Considérons un paraboloïde qui a pour plan directeur le plan des zx et pour directrices l'axe des y et la droite KH passant par l'axe des x et parallèle au plan des zy. Soit MN une des positions de la génératrice. Les éq. de cette droite seront de la forme

$$x = az \quad y = b.$$

Soient $y = mz$ $x = n$ les éq. de la directrice KH. La droite MN doit rencontrer KH. Ainsi en représentant par x' y' z' les coord du point de rencontre nous aurons les quatre éq

$$x' = az', \; y' = b \; ; \; y' = mz', \; x' = n$$

d'où $az' = n$ $mz' = b$ et par suite

$$\frac{n}{a} = \frac{b}{m} \qquad b = \frac{mn}{a}.$$

Les éq. de la ~~directrice~~ génératrice seront donc

$$x = az \quad y = \frac{mn}{a}$$

Eliminant $\underline{a}$ entre ces deux éq. nous aurons

$$xy = mnz.$$

Remplaçant ~~xy~~ mn par une seule lettre $\underline{a}$ nous

aurons pour l'éq. du paraboloïde

$$z = \frac{xy}{a}.$$

Proposons nous de trouver le centre de gravité du volume compris entre la surface du paraboloïde et le plan des xy et terminé par les plans des zx et des zy et deux plans parallèles à ceux-ci.

La formule qui donne ce volume sera

$$\int^3 dxdydz.$$

et on doit intégrer depuis $z=0$ jusqu'au z de la surface on aura

$$\frac{1}{a}\int^2 xydxdy = \frac{1}{a}\int xdx\int ydy = \frac{1}{2a}\int xdx(y^2+C)$$

Pour $y=0$ le solide est nul par conséquent $C=0$. Nous aurons donc

$$\frac{1}{4a}y^2(x^2+C)$$

C est encore 0 par const. on a pour le solide

$$\frac{1}{4a}x^2y^2.$$

Si on prend $AH=b$ $AP=c$ on aura

$$\frac{1}{4a}b^2c^2 = \frac{1}{4}b\times c\times\frac{b.c}{a}$$

$\frac{bc}{a}$ est égal à la ligne KQ par conséquent le volume est égal au quart du parallélopipède rectangle dont les trois dimensions sont AH, AP, KQ.

Pour trouver les coordonnées du centre de gravité nous aurons en représentant par V le volume

$$V x_1 = \int^3 x\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int^2 2x^2\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int^2 x^2 y\,dx\,dy = \frac{1}{2a}\int^2 x^2 dx\,(y^2 + C)$$

On doit intégrer depuis $y=0$ jusqu'à $y=c$

nous aurons donc

$$\frac{c^2}{2a}\int x^2 dx = \frac{c^2}{2.3.a}(x^3 + c)$$ et on doit

prendre l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=b$

nous aurons enfin

$$V x_1 = \frac{b^3 c^2}{6a}$$ et par suite

$$x_1 = \frac{b^3 c^2}{6.a} \times \frac{4a}{b^2 c^2} = \frac{2}{3} b.$$

Pour y_1 nous aurons

$$V y_1 = \int^3 y\,dx\,dy\,dz = \int^2 zy\,dx\,dy = \frac{1}{a}\int^2 x y^2 dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3a}\int x\,dx\,(y^3 + c)$$

Intégrant depuis $y=0$ jusqu'à $y=c$ ns aurons

$$\frac{c^3}{3a}\int x\,dx = \frac{c^3}{6a}(x^2 + c)$$

Il faut intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=b$ ce

qui donne $$V y_1 = \frac{b^2 c^3}{6a}$$ et par suite

$$y_1 = \frac{b^2 c^3}{6a} \cdot \frac{4a}{b^2 c^2} = \frac{2}{3} c.$$

Enfin pour z_1 ns aurons

$$V z_1 = \int^3 z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int^2 dx\,dy\,z^2 = \frac{1}{2a^2}\int^2 x^2 dx\,y^2 dy$$

$$= \frac{1}{6a^2}\int x^2 dx\,(y^3 + c) = \frac{c^3}{6a^2}\int x^2 dx$$

$$= \frac{c^3}{18a^2}(x^3 + c)$$ donc enfin

$$V z_1 = \frac{b^3 c^3}{18a^2}$$ et par suite

$$z_1 = \frac{b^3 c^3}{18a^2} \times \frac{4a}{b^2 c^2} = \frac{2}{9}\,\frac{bc}{a} = \frac{2}{9} Ka.$$

Supposons maintenant que le paraboloïde soit terminé par un cylindre droit à base circulaire ayant pour axe l'axe des z. $\underline{b}$ étant le rayon de la base nous aurons pour l'eq de ce cylindre

$$x^2+y^2=b^2 \text{ d'où } y=\sqrt{b^2-x^2}.$$

Nous aurons alors pour le volume

$$\int^3 dx\,dy\,dz = \frac{1}{a}\int^2 x\,dx\,y\,dy = \frac{1}{2a}\int x\,dx(y^2+c)$$

On doit intégrer depuis $y=0$ jusqu'à $y=\sqrt{b^2-x^2}$

Nous aurons donc

$$\frac{1}{2a}\int x\,dx(b^2-x^2) = \frac{1}{2a}\left(\frac{b^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)$$

On doit intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=b$ nous aurons donc

$$V = \frac{b^4}{8a}.$$

Lorsque $a=b=c$ le volume compris entre les plans parallèles est $\frac{a^3}{4}$, le volume compris entre les plans coordonnés et le cylindre est $\frac{a^3}{8}$, le 1[er] volume est donc double du 2[d].

Pour trouver les coordonnées du centre de gravité du volume terminé par le cylindre nous aurons

$$Vx_1 = \int^3 x\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{a}\int^2 x^2dx\,y\,dy = \frac{1}{2a}\int x^2dx(y^2+c)$$

Intégrant depuis $y=0$ jusqu'à $y=\sqrt{b^2-x^2}$ on trouve

$$\frac{1}{2a}\int x^2dx(b^2-x^2) = \frac{1}{2a}\left(\frac{b^2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right) = \frac{b^5}{15a}$$

Nous aurons donc

$$x_1 = \frac{b^5}{15a}\times\frac{8a}{b^4} = \frac{8}{15}b.$$

De même, on trouverait $y_1=\frac{8}{15}b.$

Pour z_1 nous aurons

$$Vz_1 = \int^3 z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2a^2}\int^2 x^2dx\,y^3dy = \frac{1}{7a^2}\int x^2dx(y^3+c)$$

$$= \frac{1}{6a^2}\int x^2dx(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Ainsi pour trouver z_1 il faudrait calculer une intégrale binome.

Proposons nous de trouver le centre de gravité de la surface cylindrique AGBMC. Cette surface est terminée par un cylindre droit qui a pour base la parabole CNB et dont l'éq. est

$$y^2 = a(a-x)$$

L'éq. de la surface dont il s'agit est

$$z = \sqrt{ax-x^2}$$

Nous aurons donc

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \qquad q = \frac{dz}{dy} = 0.$$

et par suite

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\frac{a^2-4ax+4x^2}{4ax-4x^2}} = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

Nous aurons donc pour la surface

~~$\int^2 dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{2}\int^2\frac{dx\,dy}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a}{2}\int dy\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$~~

~~Mais $ax-x^2 = \frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a-x)^2$ nous aurons donc~~

~~$\frac{a}{2}\int dy\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a-x)^2}} = \frac{a}{2}\int dy\left(\arccos\frac{a-2x}{a}+C\right)$~~

~~On doit intégrer depuis $x=0$ jusqu'à~~

~~$x = \frac{a^2-y^2}{a}$~~

$S^2 dx dy \sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{2} \int^2 \frac{dx dy}{\sqrt{ax-x^2}}$
$= \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-ax}$
(car on doit intégrer depuis $y=0$ jusqu'à l'ordonnée de la courbe BNC qui est $y=\sqrt{a^2-ax}$.)
$= \frac{a}{2} \int \sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx$
$= a^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} + C.$
Intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$ on aura
$S^2 dx dy \sqrt{1+p^2+q^2} = a^2$

x. On doit intégrer depuis $y=0$ jusqu'à $y=\sqrt{ax-x^2}$ ce qui donne
$\frac{a}{2} \int dx \sqrt{ax-x^2} =$
$\frac{a}{2}\left(C - \frac{2}{3a}(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)$
Intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$ on aura
$S z_1 = \frac{1}{3} a^3$ d'où $z_1 = \frac{1}{3} a$

Nous aurons donc

$$\frac{a}{2}\int dy \arccos \frac{a - 2\frac{a^2-y^2}{a}}{a} = \frac{a}{2}\int dy \arccos \frac{2y^2-a^2}{a^2}.$$

Or $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1$

Si $\cos u = \frac{y}{a}$ on aura $\cos 2u = \frac{2y^2}{a^2} - 1$

Donc $2u = \arccos \frac{2y^2}{a^2} - 1$

Mais $u = \arccos \frac{y}{a}$ donc enfin

$$\arccos \frac{2y^2}{a^2} - 1 = 2 \arccos \frac{y}{a}.$$

Substituant dans l'intégrale précédente nous aurons

$$\frac{a}{2}\int dy \arccos \frac{y}{a}$$

Il faut intégrer depuis $y=0$ jusqu'à $y=a$. Mais nous avons déjà trouvé la même expression qu'il fallait intégrer entre les mêmes limites, pour représenter la surface CDBM ~~la sphère~~ ce Nous aurons donc

$$\text{surf. } AGBMD = a^2$$

Pour trouver les coordonnées du centre de gravité nous aurons en représentant par S la surface

$$S z_1 = \int^2 z\, dx dy \sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{2}\int^2 dx dy.\ \text{x}$$

~~Mais~~ ~~$\int^2 dx dy$~~ ~~est~~ l'aire comprise entre les axes et la parabole ou bien les $\frac{2}{3}$ du rectangle circonscrit qui est ici a^2 nous aurons donc

$$S z_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a^2 = \frac{1}{3} a^3 \text{ d'où } z_1 = \frac{1}{3} a$$

Pour déterminer y_1 nous aurons

$$S y_1 = \int^2 y\,dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2} = \int^2 y\,dy \int \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= \frac{a}{2}\int y\,dy \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= a\int y\,dy \arccos\frac{y}{a}$$

~~Nous avons déjà intégré cette quantité entre les~~ ~~limites convenables~~ en cherchant le centre de gravité de la surface BCD nous avons

donc $y_1 = \frac{\pi}{8}a = \frac{11}{28}a$

Enfin pour trouver x_1 nous avons

$$S x_1 = \int^2 x\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{2}\int dy\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} =$$

$$= \frac{a}{2}\int dy\left(\int\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}} - \int\frac{a\,dx-2x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}\right)$$

$$= \frac{a}{2}\int dy\left(a\arccos\frac{y}{a} - \sqrt{ax-x^2}\right)$$

$$= \frac{a}{2}\int dy\left(a\arccos\frac{y}{a} - \sqrt{a^2-y^2-\frac{(a^2-y^2)^2}{a^2}}\right)$$

$$= \frac{a}{2}\int dy\left(a\arccos\frac{y}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{y^2(a^2-y^2)}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dy\arccos\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\int y\,dy\sqrt{a^2-y^2}.$$

Pour intégrer cette expression nous avons d'abord

$$\int dy\arccos\frac{y}{a} = y\arccos\frac{y}{a} + \int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= y\arccos\frac{y}{a} - \sqrt{a^2-y^2}$$

$$\int y\,dy\sqrt{a^2-y^2} = \int(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}y\,dy = -\frac{1}{2}\int -2y\,dy(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Nous avons donc en substituant

$$\int x_1 = \frac{a^2}{2} y \arccos\frac{y}{a} - \frac{a^2}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{1}{6}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

On doit prendre cette intégrale depuis $y=0$ jusqu'à $y=a$ en faisant $y=a$ on trouve zéro en faisant $y=0$ on trouve

$$-\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{6} = -\frac{1}{3}a^3$$

et comme il faut retrancher ce 2[d] résultat du 1[r] on aura

$$\int x_1 = \frac{1}{3}a^3 \quad \text{d'où } x_1 = \frac{1}{3}a.$$

Pour trouver la surface et le centre de gravité de la portion de cylindre comprise entre la sphère et le plan des zx nous avons d'abord intégré par rapport à x. Il aurait été beaucoup plus simple de commencer à intégrer par rapport à y. ~~Nous avons par~~

$$S = \int^2 dx dy \sqrt{1+p^2+q^2} =$$

$$S = \frac{a}{2}\int^2 \frac{dx dy}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}(y+C)$$

Il faut prendre cette intégrale depuis $y=0$ jusqu'à $y=\sqrt{a^2-ax}$ nous aurons donc

$$S = \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-ax} = \frac{a}{2}\int \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2}(2\sqrt{x} + C)$$

On doit intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$ nous aurons donc

$$S = a^2.$$

Pour trouver x_1 nous aurons

$$Sx_1 = \int^2 x\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{2}\int\frac{2\,x\,dx\,dy}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= \frac{a}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-ax} = \frac{a\sqrt{a}}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}a\sqrt{a}\,(x^{\frac{3}{2}}+c).$$

Intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$ nous aurons

$$Sx_1 = \frac{1}{3}a^3 \quad \text{d'où} \quad x_1 = \frac{1}{3}a.$$

On trouverait de même y_1 et z_1.

Pour les Coordonnées Polaires

Voy. Poisson p. 166. Art. 122–125.

Proposons nous de trouver la surface d'une hélicoïde.

Nous ~~avons~~ avons trouvé pour l'éq. de cette surface

$$z = b\,\text{arc tang}\,\frac{x}{y}$$

d'où

$$dz = \frac{b\,\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = b\,\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$p = \frac{by}{x^2+y^2} \qquad q = -\frac{bx}{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\frac{b^2}{x^2+y^2}}.$$

Pour parvenir plus simplement au résultat représentons par u le rayon de la base d'un des cylindres sur lesquels sont tracées les hélices qui composent la surface. Nous aurons

$$u^2 = x^2 + y^2$$

Nommons θ l'angle qu'un des rayons fait avec l'axe les y. La petite surface comprise entre deux rayons voisins et deux arcs de cercles ayant leur centre en A sera égale à $udud\theta$. Nous aurons donc pour la surface de l'hélicoïde

$$\int^2 udud\theta\sqrt{1+p^2+q^2} = \int d\theta \int du\sqrt{u^2+b^2}$$

d'où en intégrant on pose (A) Nous aurons donc

(A) $\sqrt{u^2+b^2} = z - u$

$$u = \frac{z^2-b^2}{2z}$$

$$du = \frac{(b^2+z^2)dz}{2z^2}$$

$$z-u = \frac{z^2+b^2}{2z}$$

$$\int du\sqrt{u^2+b^2} = \int\frac{(z^2+b^2)^2}{4z^3}dz$$

$$= \frac{1}{4}\int zdz + \frac{b^2}{2}\int\frac{dz}{z} + \frac{b^4}{4}\int\frac{dz}{z^3}$$

$$= \frac{1}{8}z^2 + \frac{b^2}{2}lz - \frac{b^4}{8}\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{b^2}{2}lz + \frac{1}{4}\,\frac{z^4-b^4}{z^2}$$

$$= \frac{b^2}{2}l\frac{u+\sqrt{u^2+b^2}}{b} + \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+b^2}$$

$$\int d\theta\int du\sqrt{u^2+b^2} = \frac{1}{2}\int d\theta\left(u\sqrt{b^2+u^2} + b^2 l\left(\frac{u+\sqrt{b^2+u^2}}{b}\right) + C\right)$$

Pour $u=0$ la surface est nulle par const. $C = 0$. Nous aurons donc

$$\frac{1}{2}\int d\theta\left(u\sqrt{b^2+u^2} + b^2 l\,\frac{u+\sqrt{b^2+u^2}}{b}\right)$$

Si on veut avoir l'aire de la surface terminée par le cylindre dont u est le rayon de la base et comprise entre le plan des zx et un plan qui fait avec celui-ci un angle égal à θ on aura

$$\frac{1}{2}\theta\left(u\sqrt{u^2+b^2} + l\,\frac{u+\sqrt{u^2+b^2}}{b}\right)$$

On obtiendrait le centre de gravité en remarquant que

$$x = u\sin\theta \quad y = u\cos\theta \quad z = b\theta.$$

15me Leçon. Voy. Poisson T. 2 p. 20. art. 323 – 325.

16e Leçon — Polygone Funiculaire

Lorsqu'un cordon ~~force~~ est tiré par deux forces égales et directement opposées, la tension de ce cordon est égale à l'une des forces. En effet supposons que deux poids égaux P P' soient suspendus aux extrémités d'un même cordon, qui passe sur deux poulies. Le cordon sera en équilibre. Ainsi fixant un de ses points A l'équilibre aura encore lieu. La tension de la partie AB sera égale à P' par cons.t la tension du cordon avant qu'on eût fixé un de ses points était aussi égale à P!

Soit un cordon rigide et inextensible $Amm_1 \ldots A_1$ auquel sont appliquées différentes forces A, P, $P_1 \ldots A_1$. Pour que l'équilibre ait lieu il faut que les forces appliquées aux différents points m, m_1, ... se fassent équilibre. Il faut donc que la résultante R des deux forces A et P soit directement opposée à la ligne mm_1. Transportant la force R en R', il faudra que la résultante R_1 des forces R' et P_1 soit dirigée suivant le prolongement de $m_1 m_2$ &c. Enfin il faudra

que la résultante de la force P_4 et de la tension du cordon $m_3 m_4$ soit opposée à la force A_1. Il faut donc que la résultante totale soit égale à zéro. On pouvait prévoir d'avance que l'équilibre lorsque ~~doit~~ ~~avoir~~ a lieu ~~lorsque~~ la résultante de toutes les forces est nulle, car si l'équilibre a lieu lorsque tous les points sont liés entre eux par des cordes qui peuvent tourner autour des points $m\, m_1 \ldots$ il aura lieu à plus forte raison lorsque ces points seront liés entre eux d'une manière invariable, par conséquent la résultante sera nulle. Ainsi en prenant le point A pour l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires on aura ~~d'abord~~ les 3. éq.

$$\left.\begin{aligned} A\cos a + A_1 \cos a_1 + \Sigma P \cos \alpha &= 0 \\ A\cos b + A_1 \cos b_1 + \Sigma P \cos \beta &= 0 \\ A\cos c + A_1 \cos c_1 + \Sigma P \cos \gamma &= 0. \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

Lorsque les forces $A, P \ldots A_1$ ne satisfont pas à ces conditions, l'équilibre ne peut pas avoir lieu quelque forme que l'on donne au polygone. Mais si ces conditions sont satisfaites on peut déterminer la figure que doit prendre le polygone pour que l'équilibre existe.

En effet connaissant les directions des cordons Am Pm on détermine la grandeur et la direction de leur résultante. La direction Rm, nous fait connaître celle du cordon mm_1. De même la direction R_2m_1 nous fait connaître celle de m_1m_2 &c Continuant de même on trouvera la direction de R_5 qui devra être directement opposée à celle de A_1. C'est ce qui aura toujours lieu car ~~la de~~ R_5 n'est autre chose que la résultante des forces A, P P_4 transportées au point m_4 et d'après les eq. (a) cette résultante doit être directement opposée à la force A_1.

Si les deux extrémités $A\ A_1$ du cordon sont fixes, l'équilibre sera toujours possible et on pourra déterminer la forme que prendra le polygone. En effet soit n le nombre des points m m_1... , et l l_1... les longueurs Am mm_1... On donne n forces, $3n$ angles $n+1$ longueurs Le nombre des données est donc $5n+1$. Les inconnues seront les $3n$ coordonnées des points m m_1... Les $n+1$ tensions des cordons Am, mm_1 ... m_4A_1 enfin les angles des cordons qui sont en nombre $3(n+1)$ Le nombre total des inconnues est donc $7n+4$.

Il faut donc faire voir que nous aurons $7n+4$ éq. Nous aurons d'abord les relations suivantes entre les longueurs des cordes et les coord. des points d'application (λ_1, μ_1, ν_1 étant les angles que l_1 fait avec les axes)

$$x = l\cos a \quad y = l\cos b \quad z = l\cos c.$$

$$x_1 = l\cos a + l_1\cos\lambda_1 \quad y_1 = l\cos b + l_1\cos\mu_1 \quad z_1 = l\cos c + l_1\cos\nu_1$$

$$x_2 = l\cos a + l_1\cos\lambda_1 + l_2\cos\lambda_2 \quad y_2 = \dots \quad z_2 = \dots$$

Ce qui donne $3n$ éq. Il doit y avoir équilibre à chaque point $m, m_1, m_2 \dots$ Nous aurons donc

$$A\cos a + P\cos\alpha - R\cos\lambda_1 = 0 \quad (1)$$
$$A\cos b + P\cos\beta - R\cos\mu_1 = 0 \quad (2)$$
$$A\cos c + P\cos\gamma - R\cos\nu_1 = 0. \quad (3)$$

On aura ainsi trois éq. pour chaque point ce qui donne en tout $3n$ éq. Il faut exprimer ensuite que la résultante finale de toutes les forces est nulle, ce qui donne les éq. (a)

Or en ajoutant l'éq. (1) avec les $n-1$ éq. correspondantes on trouve la 1re des éq. (a); de même ajoutant à l'éq. (2) les $n-1$ correspondantes on aura la 2de des éq. (a)

Ainsi ces 3 éq. (a) rentrent dans les précédentes. On ne doit donc pas les compter. Enfin nous avons entre les différents angles les relations

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 \\ \cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1\end{array}\right\} 2$$

$$\cos^2\lambda_1 + \cos^2\mu_1 + \cos^2\nu_1 = 1$$
$$\cos^2\lambda_2 + \cos^2\mu_2 + \cos^2\nu_2 = 1 \quad \Big\}\, n+1$$

Le point A_1 est donné de position, mais on pourrait trouver ses coordonnées comme on a trouvé celles de m m_1... Ainsi égalant les formules qu'on trouve ainsi aux valeurs des coordonnées de A_1 on aura 3. éq. Nous aurons donc en tout $7n+4$ éq. Par const on pourra déterminer toutes les inconnues.

Si le point A_1 au lieu d'être fixe est assujetti à rester sur une courbe, au lieu des 3 éq. qui déterminaient ses coordonnées on n'aura plus que les deux éq. de la courbe. Mais 2° la direction du dernier cordon doit être normale à la courbe, $\frac{dx}{ds}$ $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$ étant les angles que la tangente fait avec les axes nous aurons l'éq.

$$dx\cos a_1 + dy\cos b_1 + dz\cos c_1 = 0.$$

Nous aurons donc encore autant d'éq. que d'inconnues.

Si le point A_1 est assujetti à rester sur une surface les 3 éq. qui donnent les coord. de ce point seront remplacées par l'éq. de cette surface. Mais 2° la direction de la dernière corde doit coïncider avec la

normale à la surface nous aurons les 3 éq.

$$\cos a_1 = \frac{\frac{d\mathcal{L}}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dz}\right)^2}},\quad \cos b_1 = \frac{\frac{d\mathcal{L}}{dy}}{\sqrt{\ }}\quad \cos c_1 = \frac{\frac{d\mathcal{L}}{dz}}{\sqrt{\ }}$$

Mais ces 3 éqs se réduisent à deux car nous avons la relation

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1 \quad \text{d'où}$$

$$\cos^2 c_1 = 1 - \cos^2 a_1 - \cos^2 b_1 = 1 - \frac{\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dy}\right)^2}{\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dz}\right)^2}$$

$$\cos c_1 = \frac{\frac{d\mathcal{L}}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dz}\right)^2}}$$

Si les deux points A et A_1 pouvaient se mouvoir sur une courbe ou sur une surface ; il faudrait d'abord supposer qu'un des deux est fixe chercher quelles sont les conditions d'équilibre dans ce cas et introduire ensuite les changements nécessaires pour exprimer que le 2d point est mobile.

Si un des cordons S, S_1 ... est appliqué à un anneau qui peut glisser sur la corde $A\,m \ldots A_1$, il faudra que les deux tensions des parties de la corde situées de part et d'autre de cet anneau soient égales et par conséquent la direction de la force doit partager en deux parties égales l'angle des parties adjacentes de la corde. Ainsi si le point m_1 est un

anneau la force P_1 sera normale à l'ellipsoïde de révolution dont les foyers sont m et m_1 et si la direction de P_1 est déterminée on connaîtra le point m_1.

Considérons maintenant un polygone dont les points A A_1 sont fixes et les forces P P_1 ... parallèles entre elles. D'abord il est évident que lorsque l'équilibre aura lieu le polygone funiculaire et toutes les forces P P_1 ... seront situées ds un même plan. Nous aurons les proportions

$A : R = \sin\lambda : \sin a$ d'où $A \sin a = R \sin\lambda$

$R : R_1 = \sin\lambda_1 : \sin\lambda$ $\qquad R \sin\lambda = R_1 \sin\lambda_1$

Ainsi de suite donc

$A \sin a = R \sin\lambda = R_1 \sin\lambda_1 = R_2 \sin\lambda_2 = \ldots$

$A_1 R, R_1 \ldots$ sont les tensions des différents cordons nous voyons donc que ces tensions sont en raison inverse des sinus des angles que les directions des cordons font avec l'axe qui est parallèle aux forces. Nous aurons en général

$$R_n = \frac{A \sin a}{\sin\lambda_n}$$

Lorsque λ_n sera un angle droit R_n sera le plus petit possible. Ainsi la tension est la plus petite ds le cordon qui est horizontal.

Maintenant pour trouver les conditions d'équilibre, il faut exprimer qu'il a lieu en chaque point ce qui donne.

pour le point m — pour le point m_1

$A\sin a - R\sin\lambda = 0$ — $R\sin\lambda - R_1\sin\lambda_1 = 0$ &c.

$A\cos a + P - R\cos\lambda = 0$ — $R\cos\lambda + P_1 - R_1\cos\lambda_1 = 0$.

Nous aurons ainsi 2n éq. qui jointes avec 2n éq. qui ~~expriment~~ donnent les coordonnées des différents points en fonction des longueurs des cordes et des angles, et aux éq. correspondantes à celles que nous avons trouvées ds le cas précédent serviront à déterminer les inconnues.

En ajoutant les 1ères éq. précédentes on trouve

$$A\sin a = A_1\sin a_1$$

Ajoutant les 2des ns aurons

$$A_1\cos a_1 = A_1\cos a_1 - \Sigma P.$$

Ces deux éq. sont celles qui expriment que la résultante totale des forces est nulle.

17me Leçon. La chaînette est la courbe que forme un cordon homogène fixé à deux points.

Supposons qu'un cordon CAB soit fixé par les deux points C et B et qu'on fixe ensuite le point A, la partie AB sera en équilibre. Posons CM = S, CM' = S'. L'arc MM' est tiré par 3 forces; la pesanteur, la tension de m en A et la tension de m' en B. Appelons t la tension qui agit en m et t' celle qui agit en m'

Décomposant chacune de ces forces en deux autres qui agissent suivant les axes on aura pour les composantes dirigées suivant l'axe des x $t\frac{dx}{ds}$, $t'\frac{dx'}{ds'}$ et pour celles qui sont dirigées suivant l'axe des y $t\frac{dy}{ds}$, $t'\frac{dy'}{ds'}$.

Mais nous savons que lorsque une corde est tirée par plusieurs forces parallèles entre elles les composantes dirigées suivant l'axe perpendiculaire à ces forces sont égales, ns aurons donc

$$t\frac{dx}{ds} = t'\frac{dx'}{ds'}$$

Si on suppose que l'arc MM' soit infiniment petit et qu'on représente par P le poids de cet arc on aura d'après les éq. précédentes

$$t'\frac{dy'}{ds'} = t\frac{dy}{ds} + P.$$

Or si on représente par h le poids de l'unité de corde, P sera égal à $h(s'-s)$ et nous aurons

$$t'\frac{dy'}{ds'} = t\frac{dy}{ds} + h(s'-s)$$

Mais nous avons trouvé

$$t\frac{dx}{ds} - t'\frac{dx'}{ds'} = 0$$

lorsque les deux arcs différeront entre eux d'une quantité infiniment petite cette différence ne sera autre chose que la différentielle, ns aurons donc

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

Nous aurons aussi

$$d\left(t\frac{dy}{ds}\right) = h\,ds$$

Puisque $d\left(t\frac{dx}{ds}\right)=0$, $t\frac{dx}{ds}$ est une constante.
Représentons cette constante par C nous aurons

$$t = \frac{c}{\frac{dx}{ds}} = \frac{c\,ds}{dx}.$$

Ainsi on a

$$d\left(c\frac{ds}{dx}\,\frac{dy}{ds}\right) = h\,ds$$

ou bien $\quad d\left(c\frac{dy}{dx}\right) = h\,ds.$

Or c est égal à $t\frac{dx}{ds}$ c.à.d. à la composante dirigée suivant l'axe des x. Comme cette composante est la même pour tous les points on peut dire que c est la tension au point le plus bas. Car en ce point la tension est égale à la composante dirigée suivant l'axe des x. On tire de la dernière éq.

$$\frac{c}{h}\,d\,\frac{dy}{dx} = ds.$$

Puisque h est le poids de l'unité de corde cette quantité représente aussi la tension qu'exercerait une corde égale à l'unité de longueur et suspendue par une de ses extrémités. $\frac{c}{h}$ représentera la longueur d'une corde qui étant suspendue par une de ses extrémités exercerait une tension égale à celle du point le plus bas de la courbe. Car pour avoir cette longueur il faudrait faire la proportion $h : c = 1 : x = \frac{c}{h}$ Représentons

cette longueur par $\underline{a}$ nous aurons

$$a\,d\frac{dy}{dx} = ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

d'où
$$dx = \frac{a\,d\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$
ou bien

$$dx = \frac{a\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

En intégrant on trouve

$$x = c' + a\,l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$$

Si nous prenons pour ~~origine~~ axe des x la verticale qui passe par le point le plus bas de la courbe, pour $x=0$ on aura $p = \frac{dy}{dx} = 0$ donc $c' = 0$. Ainsi

$$l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{a}$$

Donc
$$p+\sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}} \quad (1)$$

Or
$$\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)\left(\sqrt{1+p^2}+p\right) = 1$$

Donc
$$\sqrt{1+p^2}-p = e^{-\frac{x}{a}} \quad (2)$$

Ajoutant les éq. (1) et (2) il vient

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Retranchant l'éq. (2) de l'éq. (1) on a

$$p = \frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Or $p = \frac{dy}{dx}$ nous aurons donc

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}dx - e^{-\frac{x}{a}}dx\right)$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}dx + e^{-\frac{x}{a}}dx\right)$$

Nous aurons donc en intégrant

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + c'' \quad (A)$$

$$S = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + c'$$

S doit être nul quand $x=0$ donc $C'=0$, y doit aussi être nul quand $x=0$ donc $C''=-a$ Mais si on prend pour origine le point O tel que $CO=a$. Il faudra que quand $x=0$ y soit égal à a. Nous aurons donc alors. $c''=0$

Quand on connait la direction OK et la longueur a on peut construire la chaînette au moyen de deux logarithmiques. En effet soient z et z' les ordonnées de ces logarithmiques et

$$z = a e^{\frac{x}{a}} \quad z' = a e^{-\frac{x}{a}}$$

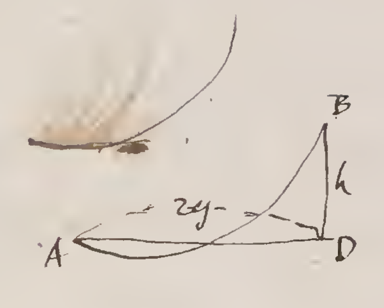
leurs éq., y sera égal à $\frac{1}{2}(z+z')$. Ainsi la ligne OBC qui passe par les points B, C milieux de Mm, M'm'... sera la chaînette. Si on cherche le point où ces deux logarithmiques se coupent on trouvera pour les coordonnées $z=a$, $x=0$, ainsi le point où elles se coupent est le point le plus bas de la chaînette. (*)

(*) Étant donnés deux points fixes et la longueur de la corde qui joint ces deux points on demande quelle sera la tension au point le plus bas. Cela revient à déterminer a. Pour cela il faut d'abord résoudre le problème suivant (*)

[Note en marge :] Si on suspend un cordon d'une longueur connue à deux points donnés de position l'éq. (A)

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

représentera la courbe décrite par ce cordon. Mais nous ne connaissons pas les axes auxquels cette éq. est rapportée. Nous savons seulement que le point le plus bas de la courbe se trouve à une distance de l'origine $= a$ sur l'axe des y. Pour déterminer les axes il suffit de trouver les coordonnées d'un des points fixes.



car la tension diminuée s'en déduit immé-
diatement.

On donne $AD = 2g$ $BD = h$ et la longueur $AB = l$. Soit x l'abscisse du point A son ordonnée sera $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. L'abscisse du point B est $x+2g$ son ordonnée sera $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+2g}{a}}+e^{-\frac{x+2g}{a}}\right)$. Or la différence des deux ordonnées est h on a donc

$$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+2g}{a}}+e^{-\frac{x+2g}{a}}-e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=h$$

La différence des arcs qui partant du point le plus bas vont se terminer aux points A et B est l, nous aurons donc

$$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+2g}{a}}-e^{-\frac{x+2g}{a}}\right)-\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=l.$$

Ajoutant ces deux éq. nous aurons

$$a\left(e^{\frac{x+2g}{a}}-e^{\frac{x}{a}}\right)=l+h$$

En retranchant la 1re de la 2de il vient

$$a\left(e^{-\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x+2g}{a}}\right)=l-h$$

Multipliant ces deux dernières on trouve

$$a^2\left(e^{\frac{2g}{a}}-2+e^{-\frac{2g}{a}}\right)=l^2-h^2.$$

ou bien

$$a^2\left(e^{\frac{g}{a}}-e^{-\frac{g}{a}}\right)^2=l^2-h^2.$$

ou enfin

$$a\left(e^{\frac{g}{a}}-e^{-\frac{g}{a}}\right)=\sqrt{l^2-h^2}$$

Au moyen de cette éq. on peut déterminer a

18me Leçon ~~Proposons nous maintenant de trouver les coordonnées du point le plus bas de la courbe.~~ Pour trouver x reprenons l'éq.

$$a\left(e^{\frac{2g+x}{a}} - e^{\frac{x}{a}}\right) = l+h$$

d'où

$$a e^{\frac{x}{a}}\left(e^{\frac{2g}{a}}-1\right) = l+h$$

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{l+h}{a\left(e^{\frac{2g}{a}}-1\right)}$$

Or l'éq. qui donne a peut s'écrire ainsi

$$a e^{-\frac{g}{a}}\left(e^{\frac{2g}{a}}-1\right) = \sqrt{l^2-h^2}$$

Multipliant par $e^{\frac{g}{a}}$ il vient

$$a\left(e^{\frac{2g}{a}}-1\right) = e^{\frac{g}{a}}\sqrt{l^2-h^2}.$$

ou bien d'après l'éq. précédente

$$\frac{l+h}{e^{\frac{x}{a}}} = e^{\frac{g}{a}}\sqrt{l^2-h^2}$$

$$\frac{l+h}{e^{\frac{g}{a}}\sqrt{l^2-h^2}} = e^{\frac{x}{a}}, \quad \frac{\sqrt{l+h}}{e^{\frac{g}{a}}\sqrt{l-h}} = e^{\frac{x}{a}}.$$

Prenant les log. des 2 membres nous aurons

$$\frac{x}{a} = -\frac{g}{a} + l\sqrt{\frac{l+h}{l-h}}.$$

$$x = -g + \frac{a}{2}\, l\, \frac{l+h}{l-h}$$

On trouverait l'ordonnée du point le plus bas en substituant cette valeur d'x ds l'éq. de la courbe. Connaissant les coordonnées du point A on connaitra les axes.

Occupons nous de la recherche des principales propriétés de la chaînette. Ces propriétés se déduisent des quatre éq. suivantes

(1) $dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$ (2) $dS = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$

(a) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (b) $S = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Ces deux dernières éq. reviennent à celles-ci

$$(3)\ y = a\frac{dS}{dx} \quad (4)\ S = a\frac{dy}{dx}$$

Elevant l'éq. (a) au carré et en retranchant a^2
~~On tire de ces deux dernières~~

on trouve $y^2 - a^2 = S^2$ d'où $S = \sqrt{y^2 - a^2}$

Elle est la formule qui donne la longueur d'un arc de chaînette, à partir du point le plus bas.

De l'éq. (3) on tire

$$y\,dx = a\,dS \text{ d'où } \int y\,dx = a(S' - S)$$

Ce qui nous apprend que l'aire ABQP est égale à l'arc AB multiplié par la constante a ou CO.

Pour le volume engendré par la surface PABQ nous aurons

$$\pi\int y^2 dx = \pi\int y \cdot y\,dx = \pi a\int y\,dS.$$

Mais $\pi\int y\,dS$ est la moitié de l'aire décrite par AB. Ainsi le volume de révolution engendré par APQB est égal à la moitié de sa surface multipliée par la constante a.

Si on prend l'arc CA à partir du point le plus bas on aura.

$$S=\sqrt{y^2-a^2} \text{ d'où } dS=\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

Nous aurons donc pour l'aire de la surface de révolution.

$$2\pi\int y\,dS = 2\pi\int\frac{y^2dy}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

Or on trouve

$$\int\frac{y^2dy}{\sqrt{y^2-a^2}}=\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2-a^2}+a^2 l\frac{(y+\sqrt{y^2-a^2})}{a}\right)$$

Nous aurons donc pour la surface

$$\pi\left(y\sqrt{y^2-a^2}+a^2 l\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\right)$$

Or en faisant la somme des valeurs de y et de S on trouve

$$\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}=e^{\frac{x}{a}}$$

Nous aurons donc enfin pour l'expression de l'aire

$$\pi\left(y\sqrt{y^2-a^2}+ax\right)$$

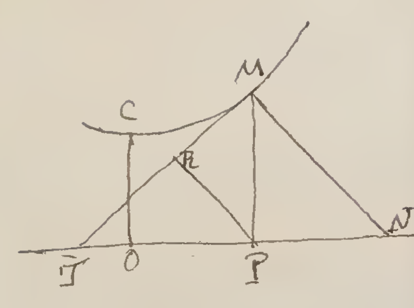
Le volume de révolution est égal à cette aire multiplié par $\frac{a}{2}$; il est donc égal à

$$\frac{\pi a}{2}\left(y\sqrt{y^2-a^2}+ax\right)$$

Cherchons maintenant les valeurs de la tangente et de la sous-tangente.

Pour la sous-tangente nous aurons

$$PT=\frac{y\,dx}{dy}=\frac{a\,dS}{dy}=\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$$



Pour la tangente nous aurons

$$MT=y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=y\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2-a^2}}=\frac{y^2}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

Si par le point P on abaisse une perpend. sur MT, MP sera moyenne proportionnelle

entre MT' et MR, on aura donc

$$MR = \frac{\overline{MP}^2}{MT} = \frac{y^2}{\frac{y^2}{\sqrt{y^2-a^2}}} = \sqrt{y^2-a^2}$$

Ainsi MR est égal à l'arc MC d'où il suit que le point R et tous les points analogues correspondent à la développante de la chainette.

La ligne PR qui est perpend. à la tangente de la développée est la tangente de la développante. Or nous avons

$$PR = \sqrt{y^2-(y^2-a^2)} = a$$

Ainsi la développante de la chainette jouit de cette propriété remarquable que sa tangente est constante. Cette courbe se nomme la *tractrice* parcequ'elle peut être engendrée par un point R tiré par un cordon RP qui se meut de manière que ~~l~~ l'extrémité P reste toujours sur l'axe.

Pour trouver la normale et la sous-normale de la chainette ns aurons

$$PN = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{yS}{a} = \frac{y\sqrt{y^2-a^2}}{a}$$

$$MN = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{S^2}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

Pour trouver le rayon de courbure nous aurons d'abord

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{s}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{y^2-a^2}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\,\frac{y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\frac{\frac{y}{a}\sqrt{y^2-a^2}}{\sqrt{y^2-a^2}} = \frac{y}{a^2}$$

donc $\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{\left(1+\frac{y^2-a^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{\frac{y^3}{a^3}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}$

Ainsi le rayon de courbure est égal à la normale. Mais ils sont dirigés en sens contraire.

Cherchons maintenant quelle est la tension du cordon en chaque point. Nous aurons pour cela

$$t\frac{dx}{ds} = c = ah, \quad \text{or} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{a}{y}$$

$$\text{donc} \quad t = hy$$

Ainsi la tension en chaque point est proportionnelle à l'ordonnée de ce point. De plus cö h est égal au poids de l'unité de cordon, il s'ensuit que la tension à chaque point est égale à un cordon qui aurait pour longueur l'ordonnée de ce point.

19me Leçon — On peut mettre sous une autre forme l'éq. de la chaînette. Pour cela je remarque que nous avons

$$s = a\frac{dy}{dx} \qquad \text{d'où}$$

$$dx = \frac{a\,dy}{s} = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} \qquad \text{et par suite}$$

$$x = a\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = a\,l\left(y+\sqrt{y^2-a^2}\right) + C$$

Lorsqu'on fait $y = a$ $x = 0$ on a donc $C = -a\,la$ et par suite nous aurons pour l'éq. de la

Chaînette

$$x = a\,l\left(\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\right)$$

Nous avons déjà trouvé pour l'éq. de la chaînette

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

les deux éq. sont identiques. En effet on tire de la 1re.

$$l\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}=\frac{x}{a} \qquad \frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}=e^{\frac{x}{a}}.$$

$$y+\sqrt{y^2-a^2}=a.e^{\frac{x}{a}}.$$

Mais on a la relation

$$y-\sqrt{y^2-a^2}=\frac{a^2}{y+\sqrt{y^2-a^2}}=\frac{a^2}{a.e^{\frac{x}{a}}}=ae^{-\frac{x}{a}}.$$

Ajoutant ces deux dernières éq. on aura

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Proposons nous de déterminer le centre de gravité d'un arc de chaînette.

Nous aurons d'abord

$$GH=\frac{\int y\,dS}{S}=\frac{\int\frac{y^2dy}{\sqrt{y^2-a^2}}}{S}=\frac{\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2-a^2}+a^2 l\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\right)}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2-a^2}+ax+C\right)}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

$y_1=a$

Lorsqu'on fait $y=a$ on a $x=0$ ~~[illegible]~~ ~~alors égale à zéro~~ par const. $C=0$. et on a

$$GH=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\frac{ax}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

Pour déterminer l'abscisse du centre de gravité nous aurons

$$OH = \frac{\int x\,dS}{S} = \frac{xS - \int S\,dx}{S} = x - \frac{\int S\,dx}{S}$$

Or $S\,dx = a\,dy$ d'où $\int S\,dx = a(y+c)$

Lorsqu'on fait $y=a$ ~~la surface~~ x est nulle donc $C=-a$ on aura donc

$$OH = x - \frac{a(y-a)}{S} \quad \text{d'où} \quad LH = \frac{a(y-a)}{S} = \frac{a\sqrt{y-a}}{\sqrt{y+a}}$$

Pour le centre de gravité de la surface OCKL nous aurons

$$OH' = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} \quad \text{Mais} \quad y\,dx = a\,dS \quad \text{donc}$$

$$OH' = \frac{\int x\,dS}{S} \quad \text{Donc} \quad OH' = OH.$$

$$HG' = \frac{\int^2 y\,dx\,dy}{\int^2 dx\,dy} = \frac{1}{2}\frac{\int y^2\,dx}{\int y\,dx} = \frac{1}{2}\frac{\int y\,dS}{S}$$

Donc $H'G' = \frac{1}{2}HG$.

Pour le centre de gravité de l'aire de révolution engendrée par l'arc KC nous aurons

$$OG'' = \frac{2\pi\int xy\,dS}{2\pi\int y\,dS} = \frac{\int xy\,dS}{\int y\,dS}.$$

Pour le solide de révolution

$$OG''' = \frac{\pi\int xy^2\,dx}{\pi\int y^2\,dx} = \frac{\int xy\,dS}{\int y\,dS} \quad \text{Donc } OG''' = OG''.$$

Pour trouver cette valeur je pose $\int y\,dS = W$.

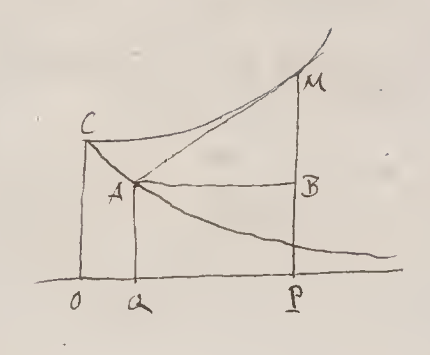
Nous aurons $\int xy\,dS = \int x\,dW = xW - \int W\,dx$.

Donc $OG'' = \dfrac{xW - \int W\,dx}{W}$ et $LG''\ \dfrac{\int W\,dx}{W}$.

Mais $W = \frac{1}{2}(y\sqrt{y^2-a^2} + ax)$ et $dx = \dfrac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$

$W\,dx = \frac{a}{2}(y\,dy + x\,dx)$ $\int W\,dx = \frac{a}{4}(y^2 + x^2 - a^2)$

Donc $LG'' = \dfrac{\frac{a}{2}(y^2+x^2-a^2)}{y\sqrt{y^2-a^2}+ax}$



Proposons nous de trouver l'éq. de la tractrice.

Nous aurons pour cela

$$x' = Oa = x - AB.$$

Mais $AB = AM \cos MAB = S \frac{dx}{ds}$ donc

$$x' = x - S\frac{dx}{ds} = x - \frac{a\,dy}{ds}$$

Mais $\frac{ds}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}$ d'où $\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{y}$

donc $\quad x' = x - \frac{a\sqrt{y^2-a^2}}{y}$

$$y' = y - MB = y - S\frac{dy}{ds} = y - \frac{y^2-a^2}{y} = \frac{a^2}{y}$$

Ainsi pour trouver l'éq. différentielle de la chaînette il faudra différentier ces valeurs de x' et de y' ce qui donnera

$$dx' = dx - \frac{ay\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} - a\,dy\sqrt{y^2-a^2}}{y^2}$$

$$dx' = \frac{a\sqrt{y^2-a^2}}{y^2}\,dy$$

$$dy' = -\frac{a^2}{y^2}\,dy$$

Divisant nous aurons

$$\frac{dx'}{dy'} = -\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a} = -\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1}$$

Pour éliminer y nous avons

$$y' = \frac{a^2}{y} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{a^2}{y'}$$

donc $\quad \frac{dx'}{dy'} = -\sqrt{\frac{a^2}{y'^2}-1} = -\frac{\sqrt{a^2-y'^2}}{y'}$

et enfin $\quad dx' = -\frac{dy'}{y'}\sqrt{a^2-y'^2}$

Telle est l'éq. différentielle de la tractrice.

20me Leçon. On en tire $dy = -\frac{y\,dx}{\sqrt{a^2-y^2}}$

Lorsque $y=a$ $\frac{dy}{dx}=\infty$ par conséquent la courbe a un point de rebroussement en C.

On peut trouver l'éq. de la tractrice sous une forme finie. Pour cela nous avons en divisant les valeurs que ns avons trouvées pour x' et y'

$$\frac{x'}{y'} = \frac{xy - a\sqrt{y^2-a^2}}{a^2} = \frac{y\,l\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a} - \sqrt{y^2-a^2}}{a}$$

Remplaçant y par sa valeur $y=\frac{a^2}{y'}$ ns aurons

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\frac{a^2}{y'}\,l\frac{\frac{a^2}{y'}+\sqrt{\frac{a^4}{y'^2}-a^2}}{a} - \sqrt{\frac{a^4}{y'^2}-a^2}}{a}$$

$$x' = a\,l\frac{a+\sqrt{a^2-y'^2}}{y'} - \sqrt{a^2-y'^2}.$$

Si ds cette éq. on fait $y=0$ on trouve $x=\infty$ Ainsi la courbe ne rencontre l'axe qu'à l'infini. Mais c'est alors $\frac{dy}{dx}=0$ la courbe est tangente à l'axe des x à l'infini, ainsi elle est asymptote à cet axe.

Pour évaluer la surface CAPM ns aurons la formule

$$CAPM = \int y\,dx = -\int dy\sqrt{a^2-y^2}.$$

Or $\int dy\sqrt{a^2-y^2}$ est égal à une portion de la surface du cercle dont le rayon est a, comprise entre l'axe des x et une parallèle à cet axe ns aurons donc

$$CAPM = C - BAQR.$$

Faisant $y = a$, la surface de la tractrice sera

nulle nous aurons donc $C = ABC$ et par suite

$$CAPM = CQR.$$

On pouvait parvenir au même résultat par des considérations géométriques. Car si on mène différentes tangentes à la courbe entre le point C et le point M et que par le point A on mène des parallèles à ces tangentes, elles partageront le secteur CAR en petits secteurs égaux à ceux qui sont formés par les tangentes, abstraction faite des petits triangles compris entre les arcs de cercle et l'axe des x. Lorsque le nombre des tangentes sera infini ces triangles seront nuls on aura donc $CAR = CASM$. Or $MPS = AQR$

Donc $CAPM = CQR.$

Il suit de là que l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe est égale au demi cercle dont le rayon est a.

Si on fait tourner la courbe autour de l'axe des x, nous aurons pour la surface ainsi engendrée

$$2\pi \int y\,dS.$$

Or $dS = dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = dy\sqrt{1+\frac{a^2-y^2}{y^2}} = \frac{a\,dy}{y}$

Par conséquent l'aire de la surface de révolution sera

$$2\pi\int y\,dS = 2a\pi\int dy = 2\pi a^2 - 2\pi a y = 2\pi a(a-y)$$

Ou bien

$$\text{aire } CM = \text{circ. } CA \times CQ.$$

Si on veut l'aire totale il faudra faire $y=0$ et doubler ce qui donnera $4\pi a^2$. C.à.d. que l'aire de la surface décrite par la tractrice est égale à l'aire de la sphère dont le rayon est a.

Pour trouver la longueur d'un arc de tractrice ns aurons

$$dS = a\frac{dy}{y} \qquad S = a\,l\,y + C$$

Intégrant entre les limites y et a ns aurons

$$S = a\,l\frac{a}{y}$$

Pour l'expression du volume de révolution engendré par la tractrice on aura

$$\pi\int y^2dx = -\pi\int ydy(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\pi(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

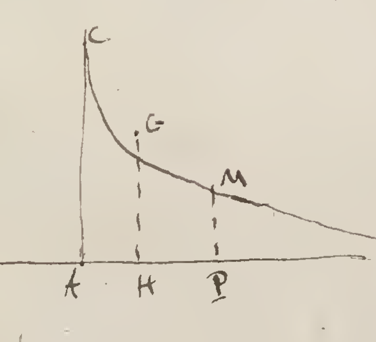
Prenant cette intégrale entre les limites a et y il vient

$$\frac{1}{3}\pi(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \quad (a)$$

(a) Ce volume est le $\frac{1}{4}$ de la sphère dont le rayon est égal à $\sqrt{a^2-y^2}$ ou QR.

Pour avoir le volume total il faut faire $y=0$ et doubler. Le volume est donc $\frac{2}{3}\pi a^3$ c.à.d. qu'il est ~~double de la~~ égal à la moitié de la sphère dont le rayon est a.

Occupons nous maintenant des centres de gravité.



D'abord pour l'arc CM ns avons

$$\int ydS = \int ady = a(a-y)$$

Donc $$GH = \frac{\int ydS}{S} = \frac{a(a-y)}{a\,l\frac{a}{y}} = \frac{a-y}{la-ly}$$

Les valeurs de AH ou de PH sont très compliquées.

Pour le centre de gravité de la surface comprise entre la courbe et l'axe des x, nous aurons

$$AH' = \frac{\int xydx}{\int ydx} = \frac{x\int ydx - \int dx\int ydx}{\int ydx} \text{ d'où}$$

$$PH' = \frac{\int dx\int ydx}{\int ydx} = \frac{\frac{1}{2}\int dx\left(a^2\arccos\frac{y}{a} - y\sqrt{a^2-y^2}\right)}{\int ydx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int\left(a^2\arccos\frac{y}{a}\frac{dy}{y}\sqrt{a^2-y^2} - ydy(a^2-y^2)\right)}{\int ydx}.$$

Les calculs qui déterminent PH' sont très compliqués la valeur de H'G' est plus facile à trouver on a pour cela

$$x\int ydx = -\int dy\sqrt{a^2-y^2}$$

$$\int dy\sqrt{a^2-y^2} = \int\frac{dy(a^2-y^2)}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= -a^2\arccos\frac{y}{a} - \int\frac{y^2dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$\int\frac{y^2dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = -y\sqrt{a^2-y^2} + \int dy\sqrt{a^2-y^2}$$

$$\int dy\sqrt{a^2-y^2} = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{y}{a} + \frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}$$

Donc enfin

$$\int ydx = \frac{1}{2}\left(a^2\arccos\frac{y}{a} - y\sqrt{a^2-y^2}\right)$$

$$H'G' = \frac{\int^2 ydxdy}{\int^2 dxdy} = \frac{\frac{1}{2}\int y^2dx}{\int ydx} = \frac{-\frac{1}{2}\int ydy\sqrt{a^2-y^2}}{\int ydx}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\arccos\frac{y}{a} - y\sqrt{a^2-y^2}}$$

Pour le centre de gravité de l'aire de révolution nous aurons

$$AG'' = \frac{\int xydS}{\int ydS} = \frac{x\int ydS - \int dx\int ydS}{\int ydS} = x - \frac{\int dx\int ydS}{\int ydS}$$

$$= x - \frac{\int dx(a-y)}{a-y}$$

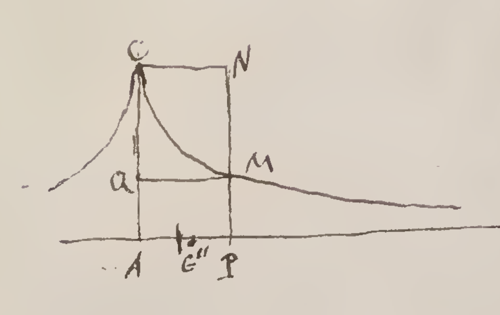
$$PG'' = \frac{\int dx(a-y)}{a-y}$$

Or $\int dx(a-y) = CMQ$ Donc

$$PG'' = \frac{CMQ}{CQ}$$

Or $AG'' = AP - \frac{CMQ}{CQ} = \frac{AP.CQ - CMQ}{CQ} = \frac{CMN}{CQ}$.

Donc le point G'' partage AP en deux parties telles qu'on a $AG'' : PG'' = CMN : CMQ$



21me Leçon.

Proposons nous de trouver la position que prendra un cordon sollicité par un certain nombre de forces dirigées dans un sens quelconque.

Considérons une portion MM' de ce cordon. Cette portion sera sollicitée par 3 forces les tensions exercées aux points M M' et la résultante des forces appliquées sur cette partie du cordon.

Soit t la tension qui agit en M et t' celle qui agit en M', les composantes de t' dirigées suivant les axes seront

$$t'\frac{dx'}{ds'},\ t'\frac{dy'}{ds'},\ t'\frac{dz'}{ds'}.$$

Comme la tension t agit en sens opposé de t' les composantes de cette force seront

$$-t\frac{dx}{ds},-t\frac{dy}{ds},-t\frac{dz}{ds}.$$

Soient X Y Z les composantes des forces appliquées à l'unité de longueur de l'arc MM' les composantes des forces appliquées à l'arc entier seront

$$X(S'-S)\quad Y(S'-S)\quad Z(S'-S)$$

Or comme on peut supposer sans troubler l'équilibre que l'arc MM' est inflexible, il sera suffisant pour l'équilibre que la somme des composantes dirigées suivant chaque axe soit nulle, on aura donc.

$$t'\frac{dx'}{ds'} - t\frac{dx}{ds} + X(S'-S) = 0$$

$$t'\frac{dy'}{ds'} - t\frac{dy}{ds} + Y(S'-S) = 0$$

$$t'\frac{dz'}{ds'} - t\frac{dz}{ds} + Z(S'-S) = 0.$$

Si on suppose que l'arc MM' devient infiniment petit les différences précédentes deviendront des différentielles et on aura

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right) + X dS = 0$$

$$d\left(t\frac{dy}{ds}\right) + Y dS = 0$$

$$d\left(t\frac{dz}{ds}\right) + Z dS = 0.$$

Developpant les différentielles.

$$t\,d\frac{dx}{dS} + dt\frac{dx}{dS} = -X dS \quad (1)$$

$$t\,d\frac{dy}{dS} + dt\frac{dy}{dS} = -Y dS \quad (2)$$

$$t\,d\frac{dz}{dS} + dt\frac{dz}{dS} = -Z dS \quad (3)$$

Multiplions la 1re de ces éq. par $\frac{dx}{dS}$, la 2de par $\frac{dy}{dS}$, la 3e par $\frac{dz}{dS}$ et ajoutons. Le multo coefficient de dt sera

$$\left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2 = 1$$

Le coefficient de dt sera

$$\frac{dx}{dS}d\frac{dx}{dS} + \frac{dy}{dS}d\frac{dy}{dS} + \frac{dz}{dS}d\frac{dz}{dS}.$$

Cette expression est égale à la moitié de la différentielle de l'expression précédente. par conséquent elle est nulle. On aura donc en faisant la somme.

$$dt = -X dx - Y dy - Z dz.$$

Si le 2^d membre de cette éq. est la différentielle exacte de $f(x,y,z)$ on aura en intégrant

$$t = c - f(x,y,z)$$

Si on a $K = c - f(a,b,c)$ on en tire

$$t = K + f(a,b,c) - f(x,y,z)$$

On pourra donc trouver quelle est la tension en chaque point du cordon avant de connaître la forme que prend ce cordon.

Pour trouver l'éq. de la courbe que formera le cordon il faut éliminer t et dt entre les éq. (1) (2) (3). Pour cela je multiplie la 1re par $\frac{dz}{ds}$ et la 3me par $\frac{dx}{ds}$ et je retranche la 3me de la 1re. Ensuite je multiplie la 1re par $\frac{dy}{ds}$ et la 2de par $\frac{dx}{ds}$ et je retranche la 1re de la 2de. Enfin je multiplie la 2de par $\frac{dz}{ds}$ et la 3me par $\frac{dy}{ds}$ et je retranche la 2de de la 3me. J'aurai ainsi

$$t\left(\frac{dz}{ds}\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\frac{dz}{ds}\right) = Z\,dx - X\,dz.$$

$$t\left(\frac{dx}{ds}\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\frac{dx}{ds}\right) = X\,dy - Y\,dx$$

$$t\left(\frac{dy}{ds}\,d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\frac{dy}{ds}\right) = Y\,dz - Z\,dy.$$

Ces éq. jointes à celle ci

$$t = K + f(a,b,c) - f(x,y,z)$$

donneront les éq. de la courbe cherchée; pour la trouver on n'aura qu'à éliminer t entre les 4 éq. précédentes. Mais comme

la dernière est une conséquence des éq. (1) (2) (3) ces 4 éq. se réduisent à 3 en sorte qu'après l'élimination de t il ne restera que 2 éq. qui seront celles de la courbe.

Appliquons ce que nous venons de dire à la chaînette. Si on suppose l'axe des y vertical, toutes les forces appliquées à chaque point du cordon se réduiront à une seule parallèle à l'axe des y et dirigée dans le sens des y négatifs. Ainsi en représentant par h le poids de l'unité de corde on aura

$$Z=0 \quad X=0 \quad Y=-h.$$

Nous aurons donc

$$t = C - \int Y dy = C + \int h dy = C + hy. \quad (x)$$

(x) On peut faire disparaître la constante en transportant l'axe des x parallèlement à lui même. Car en nommant y' les nouvelles ord. il suffira qu'on ait $C + hy = hy'$ d'où $y' - y = \frac{c}{h}$ (•)

~~Si nous concevons l'origine au point où nous l'avons déjà placée pour y=0 nous aurons trouvé Donc C=0 et par suite~~ (•) Nous aurons donc

$$t = hy.$$

Or puisque la courbe est toute entière dans le plan des xy nous avons $Z=0$ $dz=0$ $\frac{dz}{ds}=0$ $d\frac{dz}{ds}=0$, par consé la 1re et la 3me des éq. précédentes se réduisent à $0=0$ et il ne reste que la 2ème qui devient alors

$$hy\left(\frac{dx}{ds} d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} d\frac{dx}{ds}\right) = h dx$$

Divisons les deux membres par $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$ il vient

$$\frac{hy\left(\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}\right)}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}=h\left(\frac{ds}{dx}\right)^2dx$$

Mais

$$d\frac{dy}{dx}=d\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}=\frac{\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}$$

Donc l'éq. précédente devient

$$hy.d\frac{dy}{dx}=h\left(\frac{ds}{dx}\right)^2dx$$

Mais en posant $\frac{dy}{dx}=p$ ns avons $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+p^2}$

Donc

$$y\,dp=(1+p^2)\,dx \qquad (A)$$

$$y\,dp=(1+p^2)\frac{dy}{p}.$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{p\,dp}{1+p^2}=\frac{1}{2}\frac{2p\,dp}{1+p^2}$$

Intégrant ns aurons

$$ly=\frac{1}{2}l(1+p^2)+C=l\sqrt{1+p^2}+C.$$

Si nous supposons que l'axe des y passe par le pt. le plus bas de la courbe et que a représente l'ord. de ce point

pour $y=a$ ns aurons $p=0$, et par suite $c=la$. Donc

$$ly=l\left(a\sqrt{1+p^2}\right)$$

$$y=a\sqrt{1+p^2}$$

Substituant ds l'éq. (A) il vient

$$a\sqrt{1+p^2}.dp=(1+p^2)\frac{dy}{p}$$

$$a\,p\,dp=\sqrt{1+p^2}.dy.$$

$$dy=\frac{ap\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Qui est l'éq. différentielle de la chaînette que ns avons déjà obtenue.

Proposons nous de trouver la forme que prendrait un fil sans pesanteur soumis à l'action du vent. Supposons que le vent agisse ds le sens de l'axe des y. Représentons par K l'action qu'il exerce sur l'unité de longueur d'un fil parallèle à l'axe des x. Si on pose $BC = m$ la somme des actions du vent qui agissent ds l'intervalle BC sera Km. Mais on aura

$$BC = BC' \frac{dx}{ds} \text{ d'où } BC' = m \frac{ds}{dx}$$

Représentant par K' l'action que le vent exerce sur l'unité de longueur de la ligne oblique BC' l'action exercée sur la ligne totale sera $m \frac{ds}{dx} K'$. Puisque la même quantité de vent agit sur BC et sur BC' ns aurons

$$mK = m \frac{ds}{dx} K' \text{ d'où } K' = K \frac{dx}{ds}.$$

Or la force du vent agissant sur la surface ds la direction DB doit se décomposer en deux autres l'une qui agit parallèlement à la tangente et dont l'effet est nul et l'autre qui est normale à la courbe et égale à $BE = DB \frac{dx}{ds} = K\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$. Décomposant cette force en deux autres dirigées suivant les axes, ns aurons,

$$X = K\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{dy}{ds}, \quad Y = -K\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{dx}{ds}.$$

Pour trouver la tension du cordon il faut ds l'expression générale

$$dt = -(X dx + Y dy + Z dz)$$

faire $z=0$ et mettre à la place de X et de Y les valeurs que ns venons de trouver ce qui donne $dt=0$. Ainsi la tension est constante; représentons la par c. L'éq. de la courbe sera représentée par la forme générale

$$t\left(\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}\right)=X\,dy-Y\,dx$$

Le coefficient de t est égal à

$$d\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \quad \text{ou bien} \quad \left(d\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$$

Nous aurons donc en substituant à la place de X Y et t leurs valeurs.

$$t\left(d\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=K\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\cdot\frac{dx^2+dy^2}{ds^2}$$

$$\frac{c}{K}dp=dx\sqrt{1+p^2}$$

qui est l'éq. de la chaînette. Ainsi un fil sans pesanteur poussé par le vent forme une chaînette.

Si un fil pesant est soumis à la fois à l'action de la pesanteur et à celle du vent, en supposant que celui-ci agit verticalement; il prendra encore la forme de la chaînette.

En effet pour tenir compte de la pesanteur il suffit d'ajouter $-h$ à la valeur de Y que ns venons de trouver, en sorte qu'on aura

$$X=K\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{dy}{ds} \qquad Y=-K\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{dx}{ds}-h.$$

Substituant ds la formule qui donne dt on aura

$$dt = h\,dy \quad \text{d'où} \quad t = hy + c.$$

L'éq.

$$t\left(\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}\right) = X\,dy - Y\,dx$$

donnera

$$t\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\,\frac{dy}{dx} = K\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds + h\,dx$$

$$t\,d\,\frac{dy}{dx} = K\,ds + h\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx$$

ou bien, mettant à la place de t sa valeur

$$(hy + c)\,dp = K\,dx\sqrt{1+p^2} + h(1+p^2)\,dx$$

Je multiplie les deux membres par p ce qui donne

$$(hy+c)\,p\,dp = \left(K\sqrt{1+p^2} + h(1+p^2)\right)dy.$$

$$\frac{p\,dp}{K\sqrt{1+p^2} + h(1+p^2)} = \frac{dy}{hy + c} \cdot \frac{p\,dp}{1+p^2 + \frac{K}{h}\sqrt{1+p^2}} = \frac{dy}{y + \frac{c}{h}}$$

Posons $\sqrt{1+p^2} = z$ d'où $\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = dz \quad p\,dp = z\,dz$

Nous aurons

$$\frac{dy}{y + \frac{c}{h}} = \frac{z\,dz}{z^2 + \frac{K}{h}z} = \frac{dz}{z + \frac{K}{h}} \quad \text{Intégrant}$$

$$l\left(y + \frac{c}{h}\right) = l\left(z + \frac{K}{h}\right) + lc' = l\,c'\left(z + \frac{K}{h}\right)$$

$$y + \frac{c}{h} = c'z + \frac{c'K}{h}.$$

$$y + \frac{c}{h} - \frac{c'K}{h} = c'z = c'\sqrt{1+p^2}$$

c, c', K, h sont des quantités constantes, on peut donc prendre les axes de manière que $y + \frac{c - c'K}{h}$ soit la nouvelle ordonnée y'. Il est clair que par cette transformation p ne changera pas. Nous aurons donc

$$y' = c'\sqrt{1+p^2} \quad y'^2 = c'^2 + c'^2 p^2.$$

$$p = \frac{\sqrt{y'^2 - c'^2}}{c'}$$

qui est l'équ. de la chaînette. C.q.f.d

Une ligne pesante AB est suspendue à une chaîne CD sans pesanteur par des cordes AC MP mp... aussi sans pesanteur. On demande quelle est la courbe CmD. Posant $Pp = dx$ $Mm = ds$ et représentant par K ~~le poids qui agit~~ de l'unité de longueur de la ligne AB. et par Y [x] ~~la force qui agit sur l'unité de longueur~~ le poids de ~~de la ligne CD.~~ ~~la force totale qui agit sur~~ la composante provenant de Pp sera Kdx et ~~celle qui agit sur~~ Mm sera Yds. Nous aurons donc, puisque le poids agit ds le sens des y nég.

$$Yds = -Kdx.$$

[x] la composante dirigée suivant l'axe des y et provenant de la force appliquée à l'unité de longueur de CD.

Or nous avons trouvé que lorsque plusieurs forces appliquées à une ~~force~~ corde se font équilibre on a

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right) = -Xds \quad d\left(t\frac{dy}{ds}\right) = -Yds \quad d\left(t\frac{dz}{ds}\right) = -Zds.$$

Ces conditions deviennent dans ce cas

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad t\frac{dx}{ds} = c \quad t = c\frac{ds}{dx}$$

$$\text{et} \quad d\left(t\frac{dy}{ds}\right) = -Yds = K\,dx.$$

Substituant à la place de t sa valeur

$$c\,d\frac{dy}{dx} = K\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K}{c}x + c'$$

$$y = \frac{K}{2c}x^2 + c'x + c'' \quad \text{éq. d'une parabole}$$

Ainsi la courbe décrite par la corde CMD est une parabole.

Des vitesses Virtuelles

Soit m un point auquel est appliquée une force P. Supposons que ce point se meuve et parcoure l'espace infiniment petit mM. Si du point M on abaisse Mr perpend. sur la force P la ligne mr est ce qu'on appelle la vitesse virtuelle de la force. Elle sera positive si le point r tombe sur la ligne mP et nég. s'il tombe sur son prolongement.

Soit BC la courbe décrite par le point m on aura $mM = dS$. Si on prolonge l'élément mM, mT' sera la tangente à la courbe. Nommons ε l'angle que cette tangente fait avec la direction de la force P on aura $mr = dS\cos\varepsilon$.

Le produit de la force par la vitesse virtuelle est ce qu'on nomme le moment virtuel. Représentant par dp la vitesse virtuelle de la force P on aura

$$Pdp = PdS\cos\varepsilon.$$

Pour une autre force appliquée au point m on aura

$$P'dp' = P'dS\cos\varepsilon'.$$

Soient x, y, z les coord. du point m

Les cosinus des angles que la tangente en ce point fait avec les axes seront $\frac{dx}{ds}$ $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$. Soient α, β, γ les angles que la force P fait avec les axes α' β' γ' &c — — on aura

$$\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma.$$

$$Pdp = Pds\cos\varepsilon = Pdx\cos\alpha + Pdy\cos\beta + Pdz\cos\gamma.$$

On aurait de même

$$P'dp' = P'ds\cos\varepsilon' = P'dx\cos\alpha' + P'dy\cos\beta' + P'dz\cos\gamma'.$$

Ainsi de suite. Ajoutant toutes ces éq nous aurons

$$\Sigma Pdp = dx\,\Sigma P\cos\alpha + dy\,\Sigma P\cos\beta + dz\,\Sigma P\cos\gamma. \quad (A)$$

Mais pour qu'il y ait éq. au point m on doit avoir $\Sigma P\cos\alpha = 0$ $\Sigma P\cos\beta = 0$ $\Sigma P\cos\gamma = 0$

On en tirera donc $\Sigma Pdp = 0$. Réciproquement si on a $\Sigma Pdp = 0$ quel que soit le sens du déplacement du point m, les 3 conditions d'équi-libre seront satisfaites. En effet si on suppose d'abord que le mouvement ait lieu suivant une courbe dont la tangente soit parallèle à l'axe des x on aura $\frac{dy}{ds} = 0$ $\frac{dz}{ds} = 0$

d'où $\Sigma Pdp = 0 = dx\,\Sigma P\cos\alpha$ $\Sigma P\cos\alpha = 0$

si le mouvement a lieu suivant une courbe dont la tangente soit parallèle à l'axe des y on aura $\frac{dx}{ds} = 0$ $\frac{dy}{ds} = 0$

$$\Sigma Pdp = 0 = dy\,\Sigma P\cos\beta \quad \Sigma P\cos\beta = 0.$$

De même $\Sigma Pdp = 0 = dz\,\Sigma P\cos\gamma$ $\Sigma P\cos\gamma = 0.$

On voit donc que lorsque plusieurs forces appliquées à un même point se font équilibre la somme des moments virtuels est égale à zéro. Et réciproquement, si la somme des moments virtuels est nulle, en supposant que le mouvement ait lieu dans une direction quelconque, les forces se font équilibre.

Si le point m est assujetti à rester sur une surface; en prenant pour axe des z la normale à cette surface on aura ~~..........~~ $\frac{dz}{dx}=0$ ~~plan tangent ....~~ d'où $dz=0$. Par conséquent ~~........~~ la somme des moments virtuels sera

$\Sigma P ds \cos r = dx \Sigma P \cos \alpha + dy \Sigma P \cos \beta$.

Pour que cette somme soit nulle il suffira d'avoir $\Sigma P \cos\alpha = 0$ $\Sigma P \cos\beta = 0$ Et réciproquement si la somme des moments virtuels est nulle quelle que soit la direction du déplacement, ces deux dernières éq. seront satisfaites.

Si le point est assujetti à rester sur une courbe en prenant pour axe des x une parallèle à la tangente à cette courbe nous aurons $dy=0$ $dz=0$ et par suite

$$\Sigma P dp = dx \Sigma P \cos\alpha.$$

Or la condition d'équilibre est $\Sigma P \cos\alpha = 0$ Ainsi l'équilibre a lieu lorsque la somme des moments virtuels est nulle

23me Leçon. — Soient R, R' deux forces égales et directement opposées appliquées aux points m m';
x, y, z étant les coord. de m et x' y' z' celles de m' ns aurons en représentant par r la longueur m m'

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

Différentiant il vient

$$r dr = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz).$$

d'où $dr = \frac{x'-x}{r}dx' + \frac{y'-y}{r}dy' + \frac{z'-z}{r}dz'$

$$- \frac{x'-x}{r}dx - \frac{y'-y}{r}dy - \frac{z'-z}{r}dz.$$

Ou bien, en représentant par λ, μ, ν les angles que la droite mm' fait avec les axes

$$dr = \cos\lambda\, dx' + \cos\mu\, dy' + \cos\nu\, dz'$$

$$- \cos\lambda\, dx - \cos\mu\, dy - \cos\nu\, dz.$$

Or d'après ce que ns avons trouvé ds la leçon précédente ns avons

$$\cos\lambda\, dx' + \cos\mu\, dy' + \cos\nu\, dz' = ds' \cos\varepsilon'$$

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = ds \cos\varepsilon$$

donc $\quad dr = ds'\cos\varepsilon' - ds\cos\varepsilon.$

Or si la ligne mm' est inflexible et inextensible r sera une constante donc $dr = 0$ et par suite, comme $R' = R$.

$$R' ds' \cos\varepsilon' - R ds \cos\varepsilon = 0.$$

Ainsi pour deux forces égales et directement opposées mais non appliquées au même

point le principe des vitesses virtuelles se vérifie.

Considérons maintenant un système de points liés entre eux d'une manière quelconque.

Il faut faire voir d'abord comment on peut exprimer par des éq. la liaison de plusieurs points. Si par ex. les 3 pts m m_1 m_2 sont tels que les distances mm_1 mm_2 soient constantes on aura les deux éq.

m_1

m

m_2

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2=a$$
$$(x_2-x)+(y_2-y)+(z_2-z)^2=b.$$

Si au contraire on veut que la somme des distances mm_1 et mm_2 soit constante on aura

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2+(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2=a.$$

Si on veut que les points m_1 m_2 restent sur les côtés d'un angle constant, on aura

$$\cos m_1mm_2=\frac{(x_1-x)(x_2-x)+(y_1-y)(y_2-y)+(z_1-z)(z_2-z)}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z^2-z)^2}}=C.$$

Toutes les liaisons d'un système peuvent ainsi être représentées par des éq.

Si ns avons un système de n points, ns aurons $3n$ variables, par consᵗ si on donnait $3n$ éq. de liaison entre les coordonnées il ne pourrait y avoir aucun mouvement ds le système. Si on donne $3n-1$ éq. il y aura liaison complette alors on pourra déterminer la courbe suivant laquelle chacun des points peut se mouvoir. En effet

si nous éliminons toutes les variables exceptés x y z il nous restera 2 éq. entre ces trois coord. ces éq. seront celles de la courbe suivant laquelle peut se mouvoir le pt m. On déterminerait de même la courbe suivant laquelle peut se mouvoir le point m, &c.

On peut voir à priori que ds le cas de la liaison complète il suffit d'une seule éq pour déterminer les conditions d'équilibre. En effet soient $L=0$ $M=0$ $N=0$... les $3n-1$ éq qui déterminent la liaison des points. Nous aurons en différentiant et divisant par dx

$$\frac{dL}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dL}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}+\frac{dL}{dy_1}\frac{dy_1}{dx}+\ldots=-\frac{dL}{dx}$$

$$\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dM}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}+\ldots=-\frac{dM}{dx}$$

Les coefficients $\frac{dL}{dz}$ $\frac{dL}{dy}$ &c $\frac{dM}{dz}$ .. sont donnés immédiatement par les éq. $L=0$ $M=0$... ainsi au moyen des éq précédentes nous pourrons déterminer les quantités $\frac{dz}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dx_1}{dx}$ ... qui sont en nombre $3n-1$.

Or si nous admettons le principe des vitesses virtuelles que nous allons démontrer pour un système de points, la condition d'équilibre sera $\Sigma P dp = 0$. Mais nous avons

$$dp = dx \cos\alpha + dy \cos\beta + dz \cos\gamma$$

$$dp_1 = dx_1 \cos\alpha' + dy_1 \cos\beta' + dz_1 \cos\gamma'$$

&c.

Nous $dp\ dp_1\ldots$ sont les sommes des produits de dx ~~par des~~ dx_1 quantités qui contiennent les rapports $\frac{dz}{dx}\ \frac{dy}{dx}\ \frac{dx_1}{dx}\ldots$ soient $A\ A'\ A''\ldots$ ce que deviennent ces quantités lorsqu'on a remplacé ces rapports par leurs valeurs, nous aurons

$$\Sigma P\,dp = AP\,dx + A'P_1\,dx_1 + \cdots = 0$$

d'où $AP + A'P_1 + A''P_2 + \cdots = 0$

qui est la seule condition d'équilibre ds le cas d'une liaison complète.

Proposons nous maintenant de démontrer que le principe des vitesses virtuelles est vrai pour un système quelconque de points. — Nous allons d'abord faire voir qu'il a lieu lorsqu'il existe entre les points une liaison complète

Soient $m\ m_1\ldots$ plusieurs points auxquels sont appliquées les forces $P\ P'\ P''\ P_1\ P'_1\ldots$ S'il existe entre ces points une liaison complète, on pourra déterminer la courbe sur laquelle chacun d'eux doit se mouvoir. Soit AB la courbe sur laquelle doit se mouvoir le point m. Je peux toujours faire équilibre aux forces appliquées à ce point par une force Q dont on donne la direction ou l'intensité. En effet en représentant par θ l'angle que cette ~~courbe~~ force

fait avec la tangente à la courbe AB et par α α' α''... les angles que les forces P P'... font avec cette même tangente, la seule condition d'équilibre sera

$$Q\cos\theta + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \dots = 0.$$

D'où l'on tirera Q ou θ lorsque l'autre de ces deux quantités sera donnée. Soit M un point pris sur la direction de la force Q j'applique à ce point une force égale et directement opposée à la force Q. Ces deux forces ne changeront rien au système de forces. Or puisque j'ai introduit un point de plus ds le système, pour que la liaison soit complète il faut introduire 3 éq. de plus. Pour cela on peut exprimer que les distances mM m,M sont constantes et que le point M est assujetti à rester sur une surface. Alors la courbe suivant laquelle le point M doit se mouvoir sera déterminée. On pourra donc appliquer en M une force R' qui passe par le point m, et qui fasse équilibre à la force Q'. Pour déterminer R' on aura l'éq

$$R'\cos q + Q'\cos\varphi = 0.$$

J'applique en R^{m} une force R égale et directement opposée à R et le système ne sera pas changé. Ainsi les forces P P' P''... P_1 P'_1 peuvent être remplacées par les forces R P_1 P'_1. Par conséquent la condition d'équilibre ~~du système~~ pour les forces appliquées en m et m'

est $$R dr + \Sigma P_1 dp_1 = 0.$$

On démontrerait de même que les forces $R \cdot P_1 P'_1 \ldots$ et les forces appliquées au point m_2 peuvent être remplacées par un système de forces appliquées toutes au point m_2 par conséq.t il suffit de faire voir que ~~si~~

$$R dr + \Sigma P_1 dp_1 = 0$$

la condition d'équilibre du système est

$$R dr + \Sigma P_1 dp_1 = 0.$$

Il suffit donc de démontrer que $R dr = \Sigma P dp$.

Or nous avons

$$Q dq + \Sigma P dp = 0$$

$$Q dq + Q' dq' = 0.$$

d'où $\Sigma P dp = Q' dq'$

Mais $Q' dq' + R' dr' = 0$ et $R' dr' + R dr = 0$

donc $\Sigma P dp = R dr$. c. q. f. d

Supposons maintenant que la liaison ne soit pas complète. Prenons des points k k_1 qui soient liés avec les points m $m_1 \ldots$ par certaines conditions. Comme nous pourrons prendre ces conditions en nombre quelconque, la liaison du système m $m_1 \ldots k$, $k_1 \ldots$ sera complète et si on ajoute à chacun des points k k_1 des forces Q $Q' \ldots Q_1$ $Q'_1 \ldots$ qui se fassent équilibre entre elles l'équilibre ne sera pas troublé et puisque la liaison est complète nous aurons

$$\Sigma P dp + \Sigma Q dq + \Sigma Q_1 dq_1 = 0.$$

Les points K K, étant en équilibre on a les deux éq. $\Sigma Q dq = 0$ $\Sigma Q_1 dq_1 = 0$ d'où

$$\Sigma P dp = 0.$$

Ainsi quand l'équilibre a lieu la somme des moments virtuels est nulle. Réciproquement si la somme des moments virtuels est nulle en ajoutant les points K K, ~~l'égal~~ la somme des moments virtuels sera encore nulle et l'équilibre aura lieu, donc il aura aussi lieu ds le système avant qu'on ait ajouté les points K K,...

(a) (V. page 239)

Appliquons ce que nous venons de dire à l'équilibre de la presse hydraulique

Soit a la base du plus grand cylindre b celle du plus petit, P la force appliquée au 1r piston et P, celle qui est appliquée au 2d représentons par c la quantité d'eau comprise ds le tuyau horizontal et par c' la quantité totale d'eau (1)

Ns aurons l'éq. de liaison

$$az + bz_1 + c = c'$$

$$\text{d'où} \quad adz + bdz_1 = 0 \quad \frac{dz}{dz_1} = -\frac{b}{a}.$$

Puisque le déplacement peut se faire ds le sens vertical ns avons $\varepsilon = 200°$ $\cos\varepsilon = -1$ $ds\cos\varepsilon = -dz$.

Ainsi on aura en changeant les signes

$$Pdz + P_1 dz_1 = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dz_1} = -\frac{P_1}{P}.$$

$$a : b = P : P_1.$$

Garcons(?).

(1) z la hauteur du 1r piston au dessus du plan horizontal z, celle du 2d.

24me Leçon.

Proposons nous de trouver les conditions d'équilibre dans le cas d'une liaison incomplète. Soient $L=0$ $M=0$ $N=0$... les p éq. de relation. Ces éq. donnent les p éq. suivantes

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\dots+\frac{dL}{dx_1}dx_1+\dots=0.\\ \frac{dM}{dx}dx+\dots\dots+\frac{dM}{dx_1}dx_1+\dots=0.\end{array}\right\}(A)$$

&c

On en tirera les valeurs de p différentielles et les substituant dans l'éq. d'équilibre

$$\Sigma P\,dS\cos\varepsilon=0.$$

on aura une éq. qui ne contiendra plus que $3n-p$ différentielles. Égalant séparément chacun des coefficients à zéro on aura les $3n-p$ éq. d'équilibre

On peut parvenir d'une autre manière aux conditions d'équilibre. Lorsque l'équilibre a lieu nous avons d'après le théorème des vitesses virtuelles

$$Xdx+Ydy+Zdz+X_1dx_1+\dots=\Sigma P\,dS\cos\varepsilon=0. \quad (B)$$

Multiplions la 1re des éq. (A) par λ la 2de par μ la 3me par ν.... et ajoutons ces produits à l'éq. (B) nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}Xdx+Ydy+Zdz+X_1dx_1+\dots\\ +\lambda\frac{dL}{dx}dx+\lambda\frac{dL}{dy}dy+\dots\\ +\mu\frac{dM}{dx}dx+\mu\frac{dM}{dy}dy+\dots\end{array}\right\}=0.$$

Égalant à zéro chacun des coefficients de dx dy dz... nous aurons

$$\left.\begin{aligned} X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \cdots &= 0 \\ Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dy} + \cdots &= 0 \\ Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \cdots \quad \cdots &= 0 \\ X_1 + \lambda \frac{dL}{dx_1} + \mu \frac{dM}{dx_1} + \cdots &= 0 \end{aligned}\right\} (C)$$

etc

Nous aurons ainsi $3n$ éq. qui jointes aux p éq. $L=0$ $M=0$... donneront $3n+p$ éq. pour déterminer les $3n+p$ inconnues $x, y, z, x_1, \ldots \lambda, \mu, \ldots$

Eliminant entre les éq (C) les p indéterminées il nous restera $3n-p$ éq. qui seront les conditions d'équilibre.

Lagrange a démontré que les liaisons d'un système de points peuvent être remplacées par des forces appliquées à ces points et qu'on peut déterminer.

En effet ajoutons certaines forces à chacun des points du système et représentons par $\bar{X}$ $\bar{Y}$ $\bar{Z}$... les composantes de chaque point après qu'on a ajouté ces forces, la condition d'équilibre sera

$$\textstyle\sum \bar{X}dx + \bar{Y}dy + \bar{Z}dz + \bar{X}_1 dx_1 + \cdots = 0$$

égalant chacun des coefficients à zéro on aura pour les conditions d'équilibre

$$\bar{X}=0 \quad \bar{Y}=0 \quad \bar{Z}=0 \quad \bar{X}_1=0 \quad \ldots$$

Si les forces que nous avons ajoutées remplacent les liaisons, il faudra que ces conditions soient les mêmes que celles que nous avons déjà trouvées. Si donc

qu'on doit avoir

$$\bar{X} = X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \cdots$$
$$\bar{Y} = Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \cdots$$
etc.

Il faut donc ajouter aux forces qui étaient appliquées à chacun des points concourant aux conditions précédentes. Ajoutons au point m une force égale à $\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$ et dirigée suivant la normale à la surface représentée par l'éq. $L = 0$ où x y z sont les variables. Les cos. des angles que cette normale fait avec les axes sont

$$\frac{\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}} \quad \frac{\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\cdots}} \quad \frac{\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\cdots}}$$

Nous aurons donc pour les composantes de la force que nous avons ajoutée

$$\lambda \frac{dL}{dx} \quad \lambda \frac{dL}{dy} \quad \lambda \frac{dL}{dz}$$

Ajoutons de même au point m_1 une force égale à $\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz_1}\right)^2}$ et dirigée suivant la normale à la surface $L = 0$ dans laquelle x_1 y_1 z_1 sont les variables les composantes de cette force seront

$$\lambda \frac{dL}{dx_1} \quad \lambda \frac{dL}{dy_1} \quad \lambda \frac{dL}{dz_1}$$

Ainsi de suite pour les points m_2 $m_3 \ldots$

Nous ajouterons ensuite au point m une force égale à $\mu\sqrt{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right)^2}$ et dirigée suivant la normale à la surface $M=0$, $x\,y\,z$ étant les variables ; les composantes de cette force seront

$$\mu\frac{dM}{dx}\quad \mu\frac{dM}{dy}\quad \mu\frac{dM}{dz}.$$

On ajoutera à m_1 une force dont les composantes seront

$$\mu\frac{dM}{dx_1}\quad \mu\frac{dM}{dy_1}\quad \mu\frac{dM}{dz_1}.$$

Ainsi de suite pour les autres points.

Enfin on ajoutera au point m une force égale à $\nu\sqrt{\left(\frac{dN}{dx}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz}\right)^2}$ et normale à la surface $N=0$, $x\,y\,z$ étant les variables, les composantes seront

$$\nu\frac{dN}{dx}\quad \nu\frac{dN}{dy}\quad \nu\frac{dN}{dz}.$$

De même pour les autres points.

Après l'addition de toutes ces forces nous aurons pour les composantes dirigées suivant les axes.

$$\overline{X} = X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\cdots$$

$$\overline{Y} = Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\cdots$$

$$\overline{X}_1 = X_1+\lambda\frac{dL}{dx_1}+\mu\frac{dM}{dx_1}+\cdots$$

On peut donc trouver des forces qui remplacent les liaisons. c. q. f. d.

Soit $L=0$ une des éq. qui expriment la liaison d'un système de points, si on remplace l'éq. $L=0$ par $L\varphi=0$ la force qui remplace cette liaison sera la même c.à.d. que les conditions d'éq. seront les mêmes. En effet en différentiant $L\varphi=0$ on trouve

$$\varphi\left(\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz\right)+L\,d\varphi=0.$$

Mais $L=0$ on a donc en divisant par φ

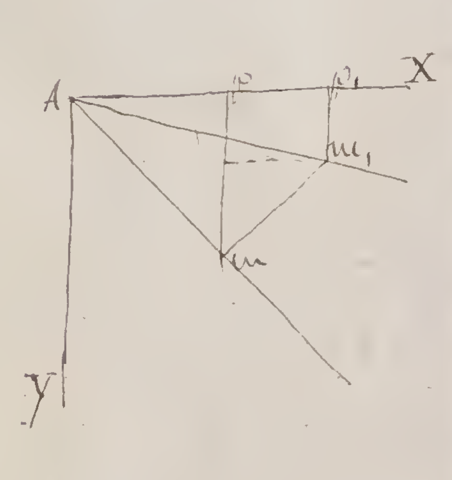
$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz=0$$

Ainsi la normale à la surface $L\varphi=0$ sera la même que la normale à la surface $L=0$

Dc m.

25ème Leçon.

Soient Am Am_1 deux droites placées ds un plan vertical deux points matériels et pesants m et m_1 sont placés sur des droites et liés entre eux par une droite inflexible et inextensible on demande quelle position prendra la droite mm_1



Soient m m_1 les poids des points matériels les composantes des forces appliquées à ces points seront

$X=0$ $X_1=0$ $Y=m$ $Y_1=m_1$

Ainsi on aura pour l'éq. d'équilibre

~~$\varphi\,dx$~~ $=0$

$$m\,dy+m_1\,dy_1=0 \quad (A)$$

Représentant par a la tangente de l'angle mAX.

et par b la tangente de l'angle m_1 AX nous aurons pour les éq. de liaison

$$y - ax = 0$$
$$y_1 - bx_1 = a.$$
$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - c^2 = 0.$$

Nous avons ds ce cas 4 coordonnées inconnues et 3 éq. de condition, nous devons donc trouver une seule éq. d'équilibre. Pour y parvenir je différentie les éq. précédentes ce qui donne

$$dy - adx = 0$$
$$dy_1 - bdx_1 = 0 \qquad \Big\} M.$$
$$(x_1 - x)(dx_1 - dx) + (y_1 - y)(dy_1 - dy) = 0$$

Multipliant la 1re par λ la 2de par μ et la 3e par ν il vient

$$\lambda dy \qquad - a\lambda dx \qquad = 0$$
$$\mu dy_1 - ~~\mu dx_1~~ - b\mu dx_1 \qquad = 0$$
$$-\nu(y_1 - y)dy + \nu(y_1 - y)dy_1 - \nu(x_1 - x)dx + \nu(x_1 - x)dx_1 = 0$$

Ajoutant ~~de~~ ces trois éq. avec l'éq. (A) et égalant séparément à zéro chacun des coefficients on aura.

$$m + \lambda - \nu(y_1 - y) = 0 \qquad m_1 + \mu + \nu(y_1 - y) = 0$$
$$a\lambda + \nu(x_1 - x) = 0 \qquad b\mu - \nu(x_1 - x) = 0$$

Des deux 1res on tire

$$m + m_1 + \lambda + \mu = 0 \qquad m + m_1 = -(\lambda + \mu)$$

des deux dernières

$$a\lambda + b\mu = 0 \text{ d'où } \quad \mu = -\frac{a}{b}\lambda.$$

Nous aurons donc en substituant

$$m + m_1 = \frac{a-b}{b}\lambda.$$

$$\lambda = \frac{b(m+m_1)}{a-b} \qquad \mu = -\frac{a(m+m_1)}{a-b}$$

$$v(x_1 - x) = -a\lambda = -\frac{ab(m+m_1)}{a-b} \qquad (B)$$

$$v(y_1 - y) = m + \lambda = m + \frac{bm + bm_1}{a-b} = \frac{am + bm_1}{a-b} \qquad (C)$$

Elevant au carré et ajoutant

$$v^2\left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right] = \frac{(am+bm_1)^2 + a^2b^2(m+m_1)^2}{(a-b)^2}$$

$$v = \pm \frac{\sqrt{(am+bm_1)^2 + a^2b^2(m+m_1)^2}}{C(a-b)}$$

Des deux éq. (B) et (C) on tire

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = -\frac{ab(m+m_1)}{am+bm_1}$$

Cette quantité est la valeur de la tangente ~~quantité~~ de l'angle que la droite $m\,m_1$ fait avec ~~de~~ l'axe des y. Ainsi la position des deux points $m\,m_1$ est déterminée.

On peut parvenir au même résultat par une autre méthode. Il faut éliminer $dx\,dy\,dx_1\,dy_1$ entre l'éq. (A) et les éq. (M). Nous aurons en substituant ds la 1re les valeurs de dy et dy_1

$$am\,dx + bm_1\,dx_1 = 0.$$

Faisant la même substitution ds la dernière

$$(x_1-x)(dx_1 - dx) + (y_1-y)(b\,dx_1 - a\,dx) = 0.$$

ou bien $\left[x_1 - x + b(y_1-y)\right]dx_1 = \left[x_1 - x + a(y_1-y)\right]dx.$

$$-\left[x_1 - x + b(y_1-y)\right]\frac{am}{bm_1} = x_1 - x + a(y_1 - y)$$

$$bm_1(x_1-x) + abm_1(y_1-y) + am(x_1-x) + abm(y_1-y) = 0.$$

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = -ab\frac{m+m_1}{bm_1+am}.$$

Nous étions déjà parvenu au même résultat.

Cette méthode a sur la 1re le désavantage de ne pas donner les pressions des lignes fixes et la tension du cordon. Car pour trouver ces quantités il faut connaître les valeurs de λ μ ν.

Pour la pression exercée par la droite fixe au point m nous aurons

$$\mathcal{P} = \lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2}$$

Mais nous avons

$$L = y - ax = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dL}{dx} = -a \quad \frac{dL}{dy} = 1.$$

Substituant ces valeurs et celle que nous avons trouvée pour λ nous aurons

$$\mathcal{P} = \frac{b(m+m_1)}{a-b}\sqrt{1+a^2}.$$

La réaction exercée par la droite au point m_1 sera

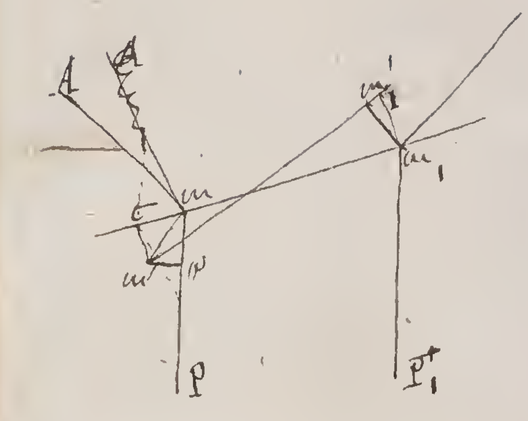
$$\mathcal{P}_1 = \mu\sqrt{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy}\right)^2} = -\frac{a(m+m_1)}{a-b}\sqrt{1+b^2}$$

Enfin pour la tension nous aurons

$$t = \nu\sqrt{\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dy}\right)^2} = \nu\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2} = c\nu$$

$$= \pm\frac{(m+m_1)\sqrt{\left(\frac{am+bm_1}{m+m_1}\right)^2 + a^2b^2}}{a-b}$$

Nous voyons donc que les pressions et la tension sont représentées par la somme des poids multipliées par des quantités numériques. Si la valeur de t le coefficient de $m+m_1$ contient les poids à la même puissance au numér. et au dénom.



Application du principe des vitesses virtuelles aux machines simples.

Considérons d'abord le polygone funiculaire. La distance Am étant constante le point m ne peut décrire qu'un arc de cercle, par conséquent si nous considérons une autre position m' du point m la ligne mm' sera perpend. sur Am. Nommant T la tension de mm, et le moment virtuel de cette tension est nég. ns aurons

$$Pm'p - Tm't = 0. \quad \text{d'où}$$

$$P : T = m't : m'p = mm'\cos tmm' : \sout{mm'}\cos pmm'$$

ou enfin $P : T = \sin Amm_1 : \sin Amp.$

Condition que ns avons déjà trouvée.

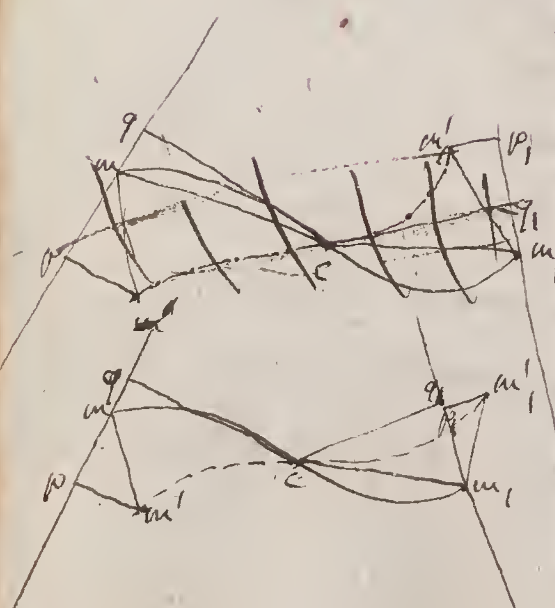
Soit maintenant une levier mcm_1 auquel sont appliquées deux forces P P_1 si le levier tourne au tour du point d'appui c de manière que le point m vienne en m' et m_1 en m_1' ns aurons pour la condition d'équilibre

$$Pm'p_1 - P_1 m_1' p_1 = 0. \quad \text{d'où}$$

~~Or puisque~~

$$P : P_1 = m_1 p_1 : mp.$$

Or puisque la distance cm est constante la ligne mm_1' est perpend. à Cm. Les deux triangles cmq mpm' sont donc semblables et on a



$$mp : cq = mm' : cm$$

de même $m_1p_1 : cq_1 = m_1m_1' : cm_1$

~~d'où~~ Mais puisque les angles mm' m_1m_1' sont égaux on a

$$m_1m_1' : mm' = cm_1 : cm$$

donc $m_1p_1 : mp = cq_1 : cq$. et par suite

$$P : P_1 = cq_1 : cq \quad \text{ou} \quad Pcq = P_1 \cdot cq_1$$

Condition déjà connue.

Pour la poulie fixe il faut supposer que le point m vient en p et le point m_1 en p_1 ns aurons

$$Pmp = P_1 m_1p_1$$

Mais la distance mCm_1 étant constante, ns aurons

$$mp = m_1p_1$$

d'où $\quad P = P_1$

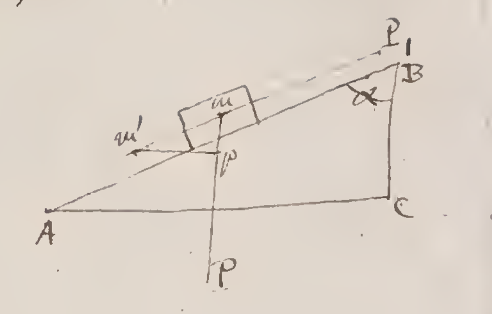
Si la poulie est mobile, il faut supposer que chaque point descend d'une quantité égale à OO'. Alors en nommant x le demi angle des cordons P et P_1 ns aurons

$$mq = OO'\cos x ; m_1q_1 = OO'\cos x \quad \text{d'où}$$

$$P_2\, OO' = P\,OO'\cos x + P_1\,OO'\cos x.$$

Mais nous avons trouvé $P = P_1$ ns aurons donc

$$P_2 = 2P\cos x.$$



Supposons un corps placé sur un plan incliné et retenu par une force parallèle à la direction du plan ; nous aurons

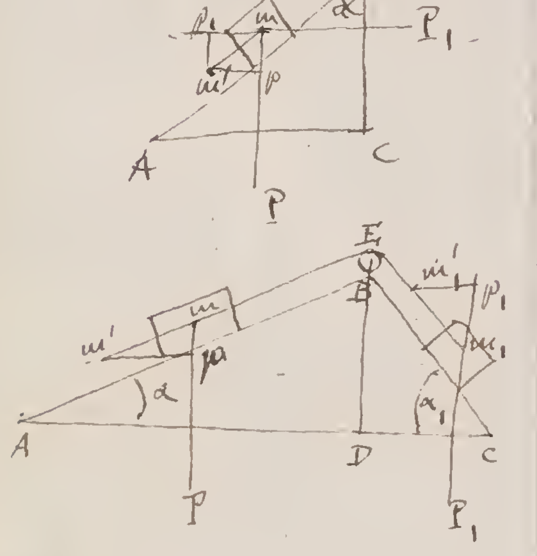
$$P.\,mp = P_1 . mm'.$$

d'où $P : P_1 = mm' : mp = 1 : \cos\alpha = AB : BC.$

Si la force qui retient le corps est horizontale on a

$$P\,m'p = P_1\, m'p_1.$$

d'où $P : P_1 = m'p_1 : m'p =$ ~~cotα~~ $1 : \tan\alpha$: ~~...~~ : $AC : BC$



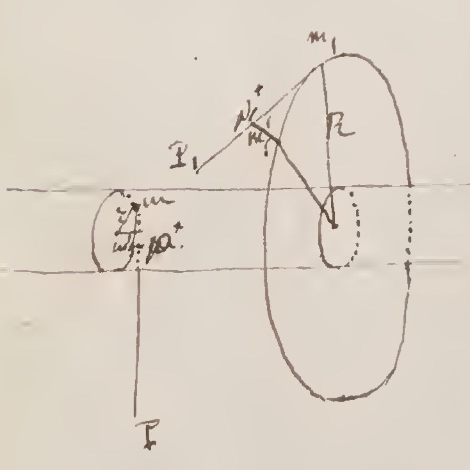
Considérons deux corps placés sur des plans inclinés adossés, et liés entre eux par un cordon. Nous aurons pour la condition d'équilibre

$$P.\,mp = P_1 . m'_1 p_1 \quad \text{d'où}$$

$P : P_1 = m_1 p_1 : mp = m_1 m'_1 \sin\alpha_1 : mm' \sin\alpha.$

Mais puisque la longueur mEm_1 est constante nous avons $mm' = m_1 m'_1$. Donc

$$P : P_1 = \frac{BD}{BC} : \frac{BD}{AB} = AB : BC. \qquad \text{c.q.f.d.}$$



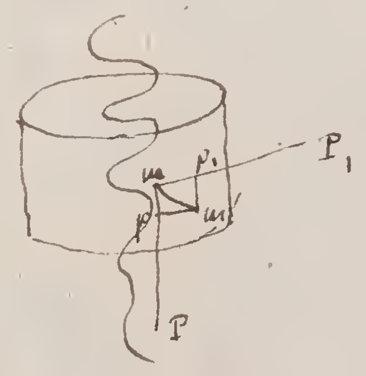
Pour le treuil nous aurons

$$P\,mp'_1 = P_1\, m'_1 p'_1 \quad \text{d'où}$$

$$P : P_1 = m_1 p'_1 : mp' = \sout{R : r}.$$

Mais les arcs décrits étant très petits on peut les confondre avec les tangentes, nous aurons donc

$$P : P_1 = m_1 m'_1 : mm' = R : r.$$



Soit une vis fixe dont l'écrou est mobile et retenu par une force tangente. Si nous supposons que le point m vienne en m' en décrivant un arc d'hélice sur le cylindre de l'écrou nous aurons

$$P.\,mp = P_1 mp_1$$

Mais $mp : mp_1 = h : 2\pi R$ donc

$$P.\,h = P_1 . 2\pi R.$$

28me Leçon.

Dynamique.

On distingue deux états de la matière l'état de repos et l'état de mouvement.

L'inertie est une propriété dont jouit la matière et en vertu de laquelle elle ne change pas d'état sans qu'on lui applique une force et le changement d'état produit est proportionnel à la force.

Le ~~mouvement est~~ repos est absolu ou relatif aucun corps ds l'univers n'est ds un repos absolu. Lorsqu'un corps a reçu une impulsion ~~et a est~~ si on ne lui applique ensuite ~~mo par~~ aucune force il se mouvra en ligne droite. On distingue quatre espèces de mouvements. Le mouvement rectiligne uniforme est celui d'un corps qui se meut en ligne droite en parcourant des espaces égaux ds des tems égaux. Le mouvement rectiligne varié est celui d'un corps qui se meut en ligne droite en parcourant des espaces inégaux ds des tems égaux. Enfin le mouvement curviligne uniforme et le mouvement curviligne varié.

Pour définir les tems égaux on suppose que par un point pris au dessus d'un plan on

laisse tomber successivement les boules parfaitement semblables, de manière que l'une ~~précédente~~ ~~com~~ de ces boules commence à tomber au moment où la précédente atteint le plan. Les instants où les différentes boules frappent le plan partageront le tems en moments égaux.

Lorsqu'un corps se meut sur une ligne droite et que son mouvement est uniforme, en représentant par v sa vitesse, c.à.d. l'espace qu'il parcourt dans l'unité de tems, ds deux unités il parcourra un espace égal à $2v$ &c. Ainsi représentant par e l'espace parcouru ds un tems égal à t, on aura

$$e = vt.$$

Supposons qu'un point parcoure une droite faisant avec les axes des angles égaux à α, β, γ. Soient a, b, c les coordonnées du point de départ C. Représentons par S la distance Cm et par t le tems employé à parcourir cette distance. Ns aurons $S = vt$.

et $\cos\alpha = \dfrac{x-a}{vt}$ $\cos\beta = \dfrac{y-b}{vt}$ $\cos\gamma = \dfrac{z-c}{vt}$

d'où $x = a + v\cos\alpha . t$ $y = b + v\cos\beta . t$ $z = c + v\cos\gamma . t$

Les quantités $v\cos\alpha$ $v\cos\beta$ $v\cos\gamma$ sont ce qu'on

appelle les vitesses projetées sur les axes, on les représente par m n p et on a alors

$$x = a + mt \quad y = b + nt \quad z = c + pt.$$

On suppose que deux points parcourent l'un la ligne CD, l'autre la ligne C_1D_1 on demande dans quelle position ces points seront le plus près possible. Nous aurons pour les coord. du point m_1

$$x_1 = a_1 + m_1 t \quad y_1 = b_1 + n_1 t \quad z_1 = c_1 + p_1 t.$$

$$\overline{mm_1}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 =$$

$$(a_1 - a + (m_1 - m)t)^2 + (b_1 - b + (n_1 - n)t)^2 + (c_1 - c + (p_1 - p)t)^2.$$

Posant $a_1 - a = A$ $b_1 - b = B$ $c_1 - c = C$ $m_1 - m = M \ldots$ ns aurons

$$\overline{mm_1}^2 = (A + Mt)^2 + (B + Nt)^2 + (C + Pt)^2.$$

Pour trouver le minimum de la distance mm_1 il faut ~~tro~~ chercher la ~~différentielle~~ dérivée de l'expression précédente et l'égaler à zéro ce qui donne

$$(A + Mt)M + (B + Nt)N + (C + Pt)P = 0.$$

$$t = -\frac{AM + BN + CP}{M^2 + N^2 + P^2}.$$

Si les deux lignes se rencontrent on prendra le plan qui les contient pour celui des xy et on aura alors $\cos\gamma = 0$ d'où $P = 0$ et par suite

$$t = -\frac{AM + BN}{M^2 + N^2}.$$

Pour avoir la plus courte distance des deux points ns aurons ds ce cas à cause de $C=0$

$$\overline{mm'}^2 = (A+Mt)^2 + (B+Nt)^2.$$

or $A + Mt = \frac{AN^2 - BMN}{M^2+N^2} = \frac{(AN-BM)N}{M^2+N^2}.$

$$B + Nt = \frac{BM^2 - AMN}{M^2+N^2} = \frac{(BM-AN)M}{M^2+N^2}.$$

Donc

$$mm' = \sqrt{\frac{(AN-BM)^2(M^2+N^2)}{(M^2+N^2)^2}} = \frac{AN-BM}{\sqrt{M^2+N^2}}.$$

Or ds ce cas-ci la plus courte distance ~~est~~ peut être nulle, puisque les deux lignes ont un point commun. Il faut donc pour que les deux points ~~se rencontrent~~ se trouvent en même tems au point d'intersection, qu'on ait $AN = BM$.

Si les deux points sont sur une même droite on aura, ~~B~~= en prenant cette droite pour axe des x $P=0$, $N=0$ et par suite

$$t = -\frac{AM}{M^2} = -\frac{A}{M} = -\frac{a_1 - a}{m_1 - m}.$$

La plus courte distance mm_1 sera toujs égale à zéro. Mais si la valeur de t est nég. les mobiles se sont déjà rencontrés ~~au moment à partir~~ avant le moment à partir duquel on compte le tems.

27me Leçon.

Considérons un point qui se meut sur une ligne droite avec un mouvement ~~uni~~ varié. Soit A le point de départ B le point à partir duquel on commence à compter le tems. M le point où le corps est parvenu après un tems t, Représentons par $\underline{a}$ la constante AB et par S la distance BM en nommant e l'espace parcouru dans un tems t ns aurons $S = e + a$. Comme le tems ne peut pas varier sans que l'espace parcouru varie et réciproquement ; nous devons avoir $S = f(t)$.

B
A m, m m' P

Si une force continue est appliquée au corps mobile son mouvement va toujours en croissant. Une force finie appliquée à un corps pendant un tems infiniment petit ne peut produire aucun mouvement. D'après cela considérons deux positions m, et m' du corps mobile telles que les espaces mm, mm' sont parcourus chacun en un tems égal à θ. En supposant que la force est celle au point m. Si l'espace mm, est infiniment petit la force qui agit sur le mobile pendant le tems qu'il parcourt cet espace n'augmentera pas sa vitesse. Ainsi l'espace mm' sera égal à mm, c.à.d. qu'à la limite ns aurons $\frac{mm_1}{mm'} = 1$.

On peut le vérifier par le calcul. ~~démontrer d'une autre manière~~
Car puisque nous avons $AM = f(t)$ en représentant par θ le tems employé à parcourir l'espace MM, ou MM' ns aurons

~~$M_1M = AM - AM_1 = \theta f'(t) - \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \cdots$~~

~~$M'M = AM' - AM = \theta$~~

$$AM_1 = f(t-\theta) = f(t) - \theta f'(t) + \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \cdots$$

$$AM'_1 = f(t+\theta) = f(t) + \theta f'(t) + \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \cdots$$

d'où

$$\frac{M_1M}{MM'} = \frac{AM - AM_1}{AM' - AM} = \frac{\theta f'(t) - \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \cdots}{\theta f'(t) + \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \cdots}$$

On peut tout diviser par θ et à la limite on aura $\theta = 0$ d'où $\frac{M_1M}{MM'} = \frac{f'(t)}{f'(t)} = 1.$

Un corps est animé par une force constante, cette force vient à cesser on demande quel sera le mouvement du corps.

A M₁ M M'

D'abord il est évident que ce mouvement sera rectiligne ~~uniforme~~. Il ~~suffit donc de~~ faut trouver la vitesse du mobile. (x) ~~En la représentant par v et trouvons~~

Mais $MM'_1 = v\theta$ ~~d'où~~

$$\frac{MM'_1}{MM'} = \frac{\theta f'(t) - \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \cdots}{v\theta}$$

Mais $\frac{MM}{MM'}$ s'approche d'autant plus de l'unité que θ est ~~(De)~~ si on fait $\theta = 0$ on aura $\frac{MM_1}{MM'} = 1$ et par suite

$$\frac{f'(t)}{v} = 1 \quad \text{d'où} \quad v = f'(t) = \frac{dS}{dt}.$$

Comme $S = e + a$ on a $dS = de$ d'où

$$v = \frac{de}{dt}$$

C'est à dire que la vitesse cherchée est égale à la différentielle de l'espace divisée par la différentielle du tems.

(x) C.à.d. l'espace qu'il parcourrait ds l'unité de tems si la force qui lui est appliquée venait à cesser. Soit A le pt de départ. M le point où se trouve le corps après un tems = t. MM_1 l'espace qu'il a parcouru ds un tems θ et MM' l'espace qu'il parcourra ds un tems aussi = θ. si la la force qui lui était appliquée vient à cesser lorsqu'il se trouve au pt M. Si nous posons $AM = f(t)$ nous aurons $AM_1 = f(t-\theta)$.

On pouvait trouver plus simplement la même valeur. Car en posant $\theta = dt$ on aura $MM' = dS$, et comme la vitesse est égale à l'espace parcouru divisé par le temps il s'en suite que

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{de}{dt}.$$

~~L'espace M_1M' ne dépend que de la force~~ φ qui agit sur le corps ~~et du temps. Nous avons~~

A B N_1 M M'_1 M'

Supposons que le mobile ~~donc~~ parcoure les espaces M_1M et MM' chacun dans un temps θ. Si on prend MM'_1 égal à MM_1 l'espace M'_1M' sera parcouru par le corps en vertu de l'accélération que lui communique la force φ en agissant sur lui pendant un temps θ, cet espace est donc une fonction de φ et de θ et on aura (*)

$$(*)\ M'_1M'_* = F(\varphi, \theta)$$

d'ailleurs

$$AM' = f(t) + \theta f'(t) + \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \cdots$$

$$AM'_1 = f(t) + v\theta = f(t) + \theta f'(t)$$

donc

$$M'_1M' = AM' - AM'_1 = \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \frac{\theta^3}{1.2.3} f'''(t) + \text{etc}.$$

Les quantités $f''(t)$ $f'''(t)$ sont indépendantes de θ et comme $M'M_1$ est une fonction de φ et de θ il s'en suit qu'on doit avoir

$$f''(t) = \mathcal{F}(\varphi)$$

Mais φ est une constante donc

$$f''(t) = g \quad \frac{d^2S}{dt^2} = g \quad \frac{dS}{dt} = gt + a$$

$$(1)\quad S = \frac{1}{2} g t^2 + at + c.$$

Mais nous avons déjà trouvé $v = \frac{dS}{dt}$ donc

$$(2)\quad v = gt + a. \quad (\odot)$$

($\odot$) Si on fait $t = 0$ on a $v = a$ ainsi la quantité a représente la vitesse qu'avait le corps au moment où on a commencé à compter le temps.

Telles sont les éq. du mouvement uniformément varié. La 1re nous apprend que si on compte le temps sur l'axe des x les espaces parcourus seront représentés par les ordonnées d'une parabole.

Pour déterminer ~~la constante~~ g ~~qui entre~~ en fonction de V et de t on aura ~~de ces deux éq. ...~~

$$v = gt + a$$

$$V = gT + a$$

d'où $$g = \frac{V-v}{T-t}$$

28me Leçon. La vitesse après un tems t est

$v = gt + a$ après un tems T elle est

$V = gT + a$ nous avons donc en nommant θ la différence des tems

$$V - v = g\theta.$$

les espaces parcourus sont

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 + at + c$$

$$S = \tfrac{1}{2}gT^2 + aT + c = \tfrac{1}{2}g(t^2 + 2t\theta + \theta^2) + at + a\theta + c \text{ d'où}$$

$$S - s = (gt + a)\theta + \tfrac{1}{2}g\theta^2 = v\theta + \tfrac{1}{2}g\theta^2$$

A, B, m, m', M

Ainsi lorsqu'un corps parcourt une droite d'un mouvement uniformément varié, l'espace mM parcouru en un tems θ se compose de deux parties l'une mm' = vθ est l'espace que le corps parcourrait ds le tems θ si la force venait à cesser au point m, l'autre m'M = ½gθ² (⊗) est l'espace qu'il parcourrait au commencement de son mouvement ds un tems égal à θ. Car si on comptait le tems à partir du point B on aura a = 0, c = 0 d'où S = ½gt². (x) On trouve par l'expérience que lorsque ~~Savoir~~ (⊗) La valeur de m'M est fonction de θ seulement donc le mouvement est uniformément accéléré

(x) Si on comptait ~~la vitesse~~ tems à partir du point B on aura V = gt. Ainsi g est la vitesse acquise après l'unité de tems. Ou bien le double de l'espace parcouru ds la 1re unité de tems.

un corps tombe vers la surface de la terre si on compte le tems et l'espace à partir du point où il commence à tomber, la vitesse est proportionnelle au tems et l'espace parcouru est proportionnel au carré du tems. La force qui attire les corps vers la terre est donc une force constante.

On trouve par l'expérience qu'en faisant t égal à une seconde l'espace parcouru est égal à $4^m,9044$ on a donc, en représentant par e l'espace parcouru

$$e = \frac{1}{2}g = 4,9044 \text{ d'où } g = 9,8088.$$

Après un tems t la vitesse d'un corps qui tombe est gt. Si la force cesse après ce tems et que le corps continue à tomber l'espace parcouru dans un 2d tems égal à t sera $e' = vt = gt^2$ Mais l'espace parcouru ds le 1er tems t était $e = \frac{1}{2}gt^2$. Ainsi l'espace qu'un corps parcourt en tombant pendant un certain tems est la moitié de celui qu'il parcourrait ds le même tems s'il se mouvait avec une vitesse égale à la vitesse acquise à la fin de sa chute.

Connaissant une des trois quantités e, t, v on peut déterminer les deux autres. On aura pour cela les relations

$$v = gt \quad e = \tfrac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2ge} \quad t = \frac{v}{g} \quad t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$$

On demande combien de tems un corps mettra à tomber d'une hauteur de 100^{m}. Il suffit de faire $e = 100$ et nous aurons

$$t = \sqrt{\frac{200}{9,8088}} = \sqrt{\frac{25}{1,2261}}$$

Sa vitesse après cette chute sera

$$v = \sqrt{19,6176}$$

On demande l'espace parcouru par un corps qui tombe pendant 5'' on aura

$$e = \tfrac{1}{2}g \cdot t^2 = 4,9044 \times 25 = 122,61.$$

Après ce tems sa vitesse sera

$$v = 5 \cdot 4,9044 = 24,522.$$

Un corps a une vitesse de 10^{m} on demande depuis combien de tems il tombe et quel espace il a parcouru. On aura

$$t = \frac{10}{9,8088} = \frac{5}{4,9044}$$

$$e = \frac{100}{9,8088} = 10,194.$$

Considérons maintenant un corps qui a une certaine vitesse au moment où on commence à compter le tems, et auquel on applique une force constante qui agit en sens contraire

A M_1 M M'_1

A m_1 m m' M

de celle qui a produit son mouvement.

Supposons que le ~~t~~ corps parcoure en un temps $t-\theta$ l'espace Am_1 et ~~temps t~~ ~~l'espace~~ Am en un temps t ~~M_1M et MM'_1~~ ~~nous prenons~~ ~~après~~ dans le temps $t+\theta$ qu'il parcoure Am'. Nous prendrons mm' ~~$MM'_1 = MM_1$~~ ~~le point M' sera à droite de Am'~~ en sorte que mm' sera plus petit que mm_1.

Mais nous avons trouvé

$$Am' - Am_1 = \frac{\theta^2}{1.2} f''(t) + \frac{\theta^3}{1.2.3} f'''(t) + \cdots$$

Il faut donc que cette différence soit négative et par conséquent qu'on ait que $f''(t)$ soit nég. c. à d. qu'on ait $f''(t) = -g$. Il faut donc pour avoir les éq. du mouvement ds ce cas remplacer g par $-g$ ce qui donne

$$v = a - gt$$

$$s = c + at - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Supposons par ex. qu'on lance un corps ds une direction verticale. Son mouvement sera dans cette retardé par l'action de la pesanteur, et en supposant qu'on compte le temps à partir du moment où on le lance, a étant la vitesse au moment du départ on aura

$$v = a - gt \qquad s = at - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Si on veut savoir jusqu'où le corps montera il suffit de faire $v = 0$ et on aura

$$t = \frac{a}{g} \qquad s = \frac{a^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}$$

Or pour qu'un corps qui tombe acquière

une vitesse égale à a il faut qu'on ait

$$t = \frac{a}{g} \qquad s = \frac{a^2}{2g}.$$

Ainsi le corps qui s'élève et celui qui tomberait d'une hauteur égale à celle à laquelle il s'élève arriveraient en même temps l'un à l'extrémité de leur course.

Considérons un corps pesant placé sur un plan incliné. Soit mp le poids de ce corps et $m\pi$ la force qui agit sur lui parallèlement au plan incliné. Nous aurons

$$l : h = mp : m\pi = \varphi : \varphi' \quad \text{d'où} \quad \varphi' = \frac{h\varphi}{l}$$

Or on admet que la force constante φ est un multiple de g en sorte qu'on a

$$\varphi = kg \qquad \varphi' = kg' \quad \text{d'où}$$

$$g : g' = \varphi : \varphi' = l : h \qquad g' = \frac{hg}{l}.$$

Cela posé soit m le point où se trouvera le corps après un temps t s'il glisse sur le plan incliné et M le point où il se trouvera après le même temps s'il suit la verticale. On aura

$$AM = \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad Am = \tfrac{1}{2}g't^2 \quad \text{d'où}$$

$$Am : AM = g' : g = h : l = AC : AB.$$

D'après cela les triangles ABC AmM sont semblables; ainsi pour avoir Am il faut calculer AM, et du point M abaisser une perpend. sur AB.

D'après cela si plusieurs corps partent en même temps du point A et glissent sur différents plans inclinés, lorsqu'un corps qui tombera suivant la verticale sera parvenu au point M, les autres seront aux points m, m', m'', situés sur une circonférence dont AM est le diamètre.

Lorsque les différents corps seront parvenus aux points C, B, B', B''. ils auront tous même vitesse. En effet la vitesse au point C sera $v = \sqrt{2ge}$. Au point B' elle sera

$v' = \sqrt{2g'l}$ or $g' = \frac{hg}{l} = \frac{ge}{l}$ donc

$v' = \sqrt{2ge} = v$.

29me Leçon.

La pesanteur n'est pas la même dans tous les lieux de la terre on le prouve par l'observation de la chute des corps et par le dynamomètre.

Soient v et v' les vitesses acquises après un temps t, e, e' les espaces parcourus dans le même temps par deux corps qui tombent en deux lieux différents de la terre. Nous aurons

$$v = gt \quad e = \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$v' = g't \quad e' = \tfrac{1}{2}g't^2$$

Donc $g : g' = v : v' = e : e'$.

Lorsqu'on veut évaluer la force accélératrice constante φ, il faut la comparer à une force accélératrice connue. Soient φ et φ' les deux forces que nous voulons comparer. Nous avons admis la proportion

$$\varphi : \varphi' = g : g' \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\varphi' g}{g'}.$$

Or nous avons

$$v = gt \qquad e = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{d'où}$$

$$dv = g\,dt \qquad \frac{de}{dt} = g\,t \qquad \frac{d^2 e}{dt^2} = g$$

Substituant ces valeurs de g ds la valeur précédente de φ on a

$$\varphi = \frac{\varphi'}{g'} \frac{dv}{dt} \quad \text{ou bien} \quad \varphi = \frac{\varphi'}{g'} \frac{d^2 e}{dt^2}.$$

L'hypothèse la plus simple à faire est de supposer $\varphi' = 1$ et $g' = 1$ c.à.d. de prendre pour unité la force qui produit ds l'unité de temps l'unité de vitesse. Si on veut par ex. prendre la pesanteur pour unité de force, il faudra prendre la seconde pour unité de temps et $9^m,8088$ pour unité linéaire.

La pesanteur varie avec la latitude. Si on représente par g l'intensité de la pesanteur à 50° de latitude l'intensité g' de la pesanteur à une latitude ψ sera donnée

par la formule

$$g' = g(1 - 0{,}002837 \cos 2\psi)$$

On voit que la pesanteur augmente depuis le 50ème degré jusqu'au pole et qu'elle diminue depuis ce degré jusqu'à l'équateur.

~~Lorsqu'on laisse tomber un corps, la vitesse acquise après l'unité de tems est $v = g$ et, l'espace parcouru est $e = \frac{1}{2}g$. Après un tems t la vitesse acquise est $v' = gt$ et l'espace parcouru est $e' = \frac{1}{2}gt^2$.~~

Lorsqu'on prend pour unité de tems la seconde sexagésimale, on a pour la vitesse acquise à la fin de la 1re unité $v = g = 9{,}8088$. Soit n le rapport qui existe entre la ~~vitesse~~ seconde centésimale et la seconde sexagésimale e étant l'espace parcouru ~~être~~ pendant la 1re seconde sexag. et e' l'espace parcouru pendant la 1re seconde cente on aura

$$e : e' = 1 : n^2.$$

Mais de l'éq. $e = \frac{1}{2}gt^2$, on tire en supposant t constant e et g variables

$$e : e' = g : g' \quad \text{donc}$$

$$g : g' = 1 : n^2.$$

c. à. d. que lorsque on prend des tems différents pour unités les vitesses acquises à la fin des premières unités de tems sont entre elles comme les durées de ces unités.

Si la force φ est variable le mouvement sera varié. Alors φ sera une fonction du tems.

Supposons qu'on donne t et qu'on demande v et e on aura

$$\varphi = F_1(t) \quad dv = \varphi dt = F_1(t) dt \quad \text{donc.}$$

$$v = \int F_1(t) dt.$$

Pour l'espace parcouru on aura

$$de = v dt = dt \int F_1(t) dt \quad \text{d'où}$$

$$e = \int dt \int F_1(t) dt.$$

Ce cas n'a aucune application

Pour trouver l'espace et le tems en fonction de la vitesse on aura

$$\varphi = F_1(v) \quad \frac{dv}{dt} = \varphi = F_1(v) \quad \frac{dv}{F_1(v)} = dt \quad \text{donc}$$

$$t = \int \frac{dv}{F_1(v)}$$

Nous aurons aussi

$$de = v dt = \frac{v dv}{F_1(v)} \quad \text{d'où}$$

$$e = \int \frac{v dv}{F_1(v)}$$

Enfin supposons qu'on donne l'espace et on aura $\varphi = F_1(e)$. Nous avons $\frac{de}{dt} = v$ d'où

$$d\frac{de}{dt} = \frac{dv}{dt} dt = \varphi dt$$

Multipliant par $\frac{de}{dt} = v$ on a

$$\frac{de}{dt} d\frac{de}{dt} = \varphi v dt = \varphi de = F_1(e) de$$

mais. $\frac{de}{dt} d\frac{de}{dt} = v dv$ donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{de}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}v^2 = (+) \int F_1(e) de$$

et par suite

$$v=\sqrt{2\int \varphi(e)\,de+2C}$$

Comme $v=\frac{de}{dt}$ on aura aussi

$$dt=\frac{de}{v}=\frac{de}{\sqrt{2\int\varphi(e)\,de+2C}}$$

On propose de déterminer le mouvement d'un corps qui se meut dans un liquide de même densité que lui. Puisque le liquide est de même densité que le mobile on peut faire abstraction de la pesanteur. On pourra considérer la résistance du liquide comme une force appliquée au mobile dans le sens opposé à celle qui lui a donné le mouvement. Ainsi le mouvement sera varié. Comme la résistance du liquide croît en raison ~~inverse~~ directe du carré de la vitesse et qu'elle est opposée à la force qui a produit cette vitesse on aura

$$\varphi=-mv^2$$

m étant une constante qui dépend de la nature du liquide. Or $\varphi=\frac{dv}{dt}$ donc

$$\frac{dv}{dt}=-mv^2 \quad \frac{dv}{v^2}=-m\,dt \quad mt=\frac{1}{v}+C.$$

Représentant par <u>a</u> la vitesse initiale, pour $t=0$ on aura $v=a$ donc $C=-\frac{1}{a}$ et par suite

$$t=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{a}\right)$$

Pour déterminer l'espace parcouru on a

$$de = v\,dt$$

or $dv = -mv^2dt$ d'où $dt = -\frac{dv}{mv^2}$ et par suite

$$m\,de = -\frac{dv}{v^2}$$ Intégrant on aura

$$me = c - lv$$

Pour $t=0$ nous avons $e=0$ $v=a$ donc $c = la$

et par suite

$$e = \frac{1}{m}\,l\,\frac{a}{v}$$

Représentons par ε la base du système Neperien nous aurons

$$\frac{a}{v} = \varepsilon^{me} \text{ d'où } \frac{1}{v} = \frac{\varepsilon^{me}}{a}$$

Or nous avons déjà trouvé

$$t = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a}\right) \text{ d'où } t = \frac{1}{m}\left(\frac{\varepsilon^{me} - 1}{a}\right) \text{ d'où}$$

$$\varepsilon^{me} = 1 + amt \text{ et par suite}$$

$$e = \frac{1}{m}\,l(1 + amt).$$

Déterminer le mouvement vertical d'un corps pesant en ayant égard à la résistance de l'air.

Supposons d'abord que le corps tombe vers la terre. En faisant abstraction de la résistance de l'air on aurait

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2} = g$$

Ainsi en considérant la résistance mv^2 de l'air nous aurons

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2} = g - mv^2$$

Si la vitesse devenait assez grande pour que $g = mv^2$, la vitesse deviendrait uniforme car alors, la perte de vitesse occasionnée par l'air serait égale à l'accélération de la pesanteur. Représentons cette vitesse par K nous aurons

$$g - mK^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad K = \sqrt{\frac{g}{m}}$$

Nous aurons d'après cela

$$\frac{dv}{dt} = m(K^2 - v^2)$$

$$\frac{dv}{K^2 - v^2} = m\,dt$$

Pour intégrer cette éq. il faut décomposer le 1r membre, je pose pour cela

$$\frac{1}{v^2 - K^2} = \frac{A}{v-K} + \frac{B}{v+K} \quad \text{d'où on tire}$$

$$A = \frac{1}{2K} \qquad B = -\frac{1}{2K}$$

Nous aurons donc

$$\frac{1}{K^2 - v^2} = \frac{1}{2K(v+K)} - \frac{1}{2K(v-K)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{v+K} + \frac{1}{K-v}\right)$$

et par suite

$$m\,dt = \frac{1}{2K}\left(\frac{dv}{K+v} + \frac{dv}{K-v}\right)$$

Intégrant il vient

$$mt = \frac{1}{2K}\left(l(K+v) - l(K-v)\right) + C = \frac{1}{2K}\, l\,\frac{K+v}{K-v} + C.$$

Or lorsque $t = 0$ on a $v = 0$ et comme le log. de 1 est zéro, on aura $C = 0$ et par suite

$$t = \frac{1}{2mK}\, l\,\frac{K+v}{K-v}. \qquad (A)$$

Cherchons maintenant l'espace en fonction de la vitesse. Nous aurons

$$ds = v\,dt \quad \text{par conséquent}$$

$$\frac{v\,dv}{K^2-v^2} = m v\,dt = m\,ds.$$

Intégrant

$$m s = c - \frac{1}{2} l(K^2-v^2)$$

quand $v=0$ s est aussi nul on a donc $c = \frac{1}{2} l K^2$

et par suite

$$s = \frac{1}{2m} l \frac{K^2}{K^2-v^2}. \quad (B)$$

Cherchons maintenant une relation entre l'espace parcouru et le temps. Pour cela il faut éliminer v entre les deux éq. (A) et (B). Nous aurons d'abord

$$2Kmt = l \frac{K+v}{K-v} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{K+v}{K-v} = e^{2Kmt}.$$

Nous tirons de là

$$v(1+e^{2Kmt}) = K(e^{2Kmt}-1) \quad \text{d'où}$$

$$v = K \frac{e^{2Kmt}-1}{e^{2Kmt}+1} \quad (C)$$

Divisant haut et bas par e^{2Kmt}

$$v = K \frac{1-e^{-2Kmt}}{1+e^{-2Kmt}}.$$

On voit par là que K n'est égal à v que lorsque t est infini.

Il faut maintenant substituer cette valeur de v ds l'expression (B) et nous aurons.

$$s = \frac{1}{2m}\, l \frac{K^2}{K^2 - K^2\dfrac{(1-e^{-2mkt})^2}{(1+e^{-2mkt})^2}}$$

ou bien

$$s = \frac{1}{2m}\, l \frac{(1+e^{-2mkt})^2}{1+2e^{-2mkt}+e^{-4mkt}-1+2e^{-2mkt}-e^{-4mkt}}$$

$$s = \frac{1}{2m}\, l \frac{(1+e^{-2mkt})^2}{4e^{-2mkt}}$$

ou bien enfin

$$s = \frac{1}{m}\, l \frac{1+e^{-2mkt}}{2e^{-mkt}} . \quad (D) \quad s = \frac{1}{m}\, l \frac{e^{mkt}+e^{-mkt}}{2}$$

30me Leçon.

Si on suppose que la résistance de l'air est nulle il faut faire $m=0$. aussi en faisant cette hypothèse sur les formules (A) (B) (C) (D) on doit retrouver celles que nous avons déjà obtenues en faisant abstraction de la résistance de l'air.

Considérons d'abord la formule (C). Ns avons (P 62)

$$e^{-2kmt} = 1 - \frac{2kmt}{1} + \frac{4k^2m^2t^2}{1.2} - \frac{8k^3m^3t^3}{1.2.3} + \dots$$

et par conséquent

$$v = \frac{2k^2mt - 2k^3m^2t^2 + \frac{4}{3}k^4m^3t^3 + \dots}{2 - 2kmt + 2k^2m^2t^2 - \frac{4}{3}k^3m^3t^3 + \dots}$$

Mais ns avons $K = \sqrt{\frac{g}{m}}$. Substituant on a

$$v = \frac{2gt + 2g\sqrt{gm}\,t^2 + \frac{4}{3}g^2m^2t^3 + \cdots}{2 + 2\sqrt{gm}\cdot t + \frac{4}{3}g^2mt^3 + \cdots}$$

Faisant maintenant $m = 0$ il vient

$$v = gt.$$

Ce qu'il fallait trouver.

Passons maintenant à la formule (D) nous avons

$$e^{Kmt} = 1 + \frac{Kmt}{1} + \frac{K^2m^2t^2}{1.2} + \frac{K^3m^3t^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$e^{-Kmt} = 1 - \frac{Kmt}{1} + \frac{K^2m^2t^2}{1.2} - \frac{K^3m^3t^3}{1.2.3} + \cdots$$

Ajoutant ces deux séries et divisant par 2

$$\frac{e^{Kmt} + e^{-Kmt}}{2} = 1 + \frac{K^2m^2t^2}{1.2} + \frac{K^4m^4t^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Donc

$$S = \frac{1}{m}\,l\left(1 + \frac{K^2m^2t^2}{1.2} + \frac{K^4m^4t^4}{1.2.3.4} + \cdots\right)$$

Remplaçant K^2 par sa valeur $\frac{g}{m}$

$$S = \frac{1}{m}\,l\left(1 + \frac{gmt^2}{1.2} + \frac{g^2m^2t^4}{1.2.3.4} + \cdots\right)$$

Or nous avons la formule   I (59)

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Faisant $x = \frac{gmt^2}{1.2} + \frac{g^2m^2t^4}{1.2.3.4} + \cdots$ nous aurons

$$S = \frac{1}{m}\left(\frac{gmt^2}{1.2} + \frac{g^2m^2t^4}{1.2.3.4} + \cdots - \frac{g^2m^2t^4}{1.4} - \frac{g^4m^4t^{16}}{1.4.9.16} \cdots + \right)$$

$$S = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g^2mt^4}{1.2.3.4} + \cdots - \frac{g^2mt^4}{1.4} - \cdots$$

Faisant $m=0$ il vient

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{c. q. f. t.}$$

Considérons maintenant le cas où on lance un corps ds une direction verticale. La vitesse sera ralentie par la pesanteur et par la résistance de l'air. Ns aurons donc

$$\frac{dv}{dt}=-g-mv^2$$

Posons encore $K^2=\frac{g}{m}$ d'où $g=mK^2$ Ns aurons

$$\frac{dv}{dt}=-m(K^2+v^2)$$

Par conséquent

$$mdt=-\frac{dv}{K^2+v^2}=-\frac{1}{K}\frac{d\frac{v}{K}}{1+\left(\frac{v}{K}\right)^2}$$

Nous aurons donc en intégrant

$$mt=c-\frac{1}{K}\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{K}$$

Supposons que la vitesse initiale du mobile soit $\underline{a}$ nous aurons

$$c=\frac{1}{K}\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{K}.$$

Par conséq.t

$$t=\frac{1}{Km}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{K}-\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{K}\right)$$

formule qui ns donne le tems en fonction de la vitesse. Pour avoir la vitesse en fonction du tems il faut résoudre cette éq. par rapport à v. Ns en tirons d'abord

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{K}=\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{K}-Kmt$$

$$\frac{v}{K}=\operatorname{tang}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{K}-Kmt\right)$$

Développant d'après la formule on trouve

$$\frac{v}{K} = \frac{\frac{a}{K} - \text{tang } Kmt}{1 + \frac{a}{K} \text{tang } Kmt}$$

ou bien enfin

$$v = K \frac{a - K \text{tang } Kmt}{K + a \text{ tang } Kmt}$$

Si on veut savoir au bout de combien de tems le corps cessera de monter, il faut chercher quelle sera la valeur de t lorsqu'on fera ~~t~~ $v = 0$ On aura alors

$$a - K \text{tang } Kmt = 0 \quad \text{d'où}$$

$$t = \frac{1}{Km} \text{ arc tang } \frac{a}{K};$$

Si la vitesse initiale étoit égale à K le tems après le quel le corps cesserait de monter serait

$$t' = \frac{\pi}{4Km} = \frac{\pi}{4\sqrt{gm}}.$$

Cherchons maintenant l'espace parcouru en fonction de la vitesse. Nous avons

$$\frac{ds}{dt} = v$$

et puisque $$dt = -\frac{dv}{m(K^2+v^2)}$$

nous aurons $$m\,ds = -\frac{v\,dv}{K^2+v^2}.$$

$$ms = c - \frac{1}{2} l(K^2+v^2)$$

Quand on fait $s = 0$, on a $v = a$ donc

$$c = \frac{1}{2} l(K^2+a^2) \quad \text{et par conséquent}$$

$$s = \frac{1}{2m} l \frac{a^2+K^2}{v^2+K^2}.$$

Pour trouver la plus grande hauteur à la quelle le corps peut parvenir il faut faire $v = 0$ ce qui

donne $h = \frac{1}{2m} l\left(1 + \frac{a^2}{K^2}\right)$

Lorsque nous avons résolu le même problème en faisant abstraction de la résistance de l'air, ns avons trouvé $h = \frac{a^2}{2g}$. Il faut donc qu'en faisant $m = 0$ ds l'expression précédente on parvienne au même résultat. Or en remplaçant K par sa valeur ns aurons

$$h = \frac{1}{2m} l\left(1 + \frac{a^2 m}{g}\right)$$

$$h = \frac{1}{2m}\left(\frac{a^2 m}{g} - \frac{a^4 m^2}{2g^2} + \frac{a^6 m^3}{3 \cdot g^3} - \cdots\right)$$

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{g} - \frac{a^4 m}{2g^2} + \frac{a^6 m^2}{3 \cdot g^3} - \cdots\right)$$

Faisant ensuite $m = 0$ on trouve $h = \frac{a^2}{2g}$. c.q.f.t.

Voy. Poisson. Art. 200–206. Page 288. T1.

32me Leçon.

Nous avons considéré jusqu'à présent un corps matériel indépendamment de sa nature nous allons voir maintenant comment on peut y avoir égard.

Soit un point matériel m auquel on applique pendant l'unité de tems une force q. Supposons d'autres points m' m'' parfaitement égaux au pt m et appliquons à chacun d'eux une force égale à q pendant l'unité de tems. La vitesse du point m étant v ce sera aussi celle des pts m' m''... Si maintenant nous supposons

que ces points sont liés entre eux, leur vitesse sera encore v. De là nous conclurons que la force nécessaire pour donner à différents corps de même nature la vitesse 1 dans l'unité de tems est proportionnelle aux volume de ces corps. On aura donc en représentant par v le volume d'un corps et par φ la force nécessaire pour lui donner une vitesse égale à 1 dans l'unité de tems

$$\varphi = kv.$$

Si on prend pour unité de force celle qui dans l'unité de tems communique une vitesse égale à 1 à un corps dont le volume est 1 nous aurons en faisant $v=1$ $\varphi = k = 1$ et l'éq. précédente deviendra $\varphi = v$.

Si les corps ne sont pas de même nature les mêmes forces ne communiqueront pas des vitesses égales à des volumes égaux. On appelle <u>densité</u> d'un corps la force nécessaire pour communiquer dans l'unité de tems l'unité de vitesse à l'unité de volume de ce corps. On nomme <u>masse</u> d'un corps la force nécessaire pour lui communiquer l'unité de vitesse dans l'unité de tems.

Représentons par M la masse et par D la densité; en multipliant la densité par le volume on devra avoir la masse. Car d'après les définitions

que ns venons de donner, D est la masse du volume 1, 2D celle du volume 2 &c. enfin VD est la masse du volume V. ns aurons donc

$$M = VD.$$

Tous les corps tombent ds le vide avec la même vitesse, on peut conclure de là que le rapport du poids à la masse est constant. En effet le poids d'un corps est la force qui ds l'unité de tems lui communique une vitesse égale à g. Ainsi puisque les forces sont proportionnelles aux vitesses, ns aurons

$$M : P = 1 : g$$

d'où $$P = gM$$

Or g est constant ds tous les corps, ainsi le rapport $\frac{P}{M}$ est constant. Nous avons trouvé $M = V.D.$ Ns aurons donc

$$P = g.V.D.$$

Lorsqu'il ne s'agit que d'une molécule matérielle la force accélératrice qui produit un mouvement quelconque est

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

Mais si m est la masse du corps la force motrice qui agit sur le corps sera

$$f = m\frac{dv}{dt}$$

Nous avons trouvé pour le mouvement d'un corps qui se meut ds un milieu résistant.

$$\frac{dv}{dt} = g - mv^2.$$

mv^2 est la force qui provient de la résistance de l'air. Il s'agit de calculer m. Or cette force est proportionnelle à la surface du mobile au carré de sa vitesse et à la densité de l'air. En désignant par r le rayon du mobile supposé sphérique par v sa vitesse, par D' la densité du milieu enfin par f la force motrice qui représente la résistance du milieu on aura

$$f = \mu D' r^2 v^2$$

μ étant un coefficient numérique qui restera le même tant qu'il s'agira d'un corps sphérique.

Pour déduire de cette valeur de f celle de la force accélératrice correspondante il faut diviser la première par la masse du mobile. Or cette masse est égale à la densité du corps multipliée par son volume, lequel volume est proportionnel au cube du rayon. Si donc nous désignons cette densité par D, la force accélératrice sera représentée par

$$\frac{f}{Dr^3} = \frac{\mu D' v^2}{Dr}$$

C'est cette même force que nous avons désignée par mv^2, on aura donc

$$m = \frac{\mu D'}{Dr}.$$

Si on veut avoir égard à la perte de poids faite par l'air, alors g sera diminué du poids d'un volume d'air égal à celui du corps et on aura

$$g' = gV(D - D')$$

Pour avoir la valeur de la force accélératrice qui en résulte il faut diviser g' par m.

Mais $V = \frac{m}{D}$ nous aurons donc

$$\frac{g'}{m} = g \cdot \frac{D - D'}{D}.$$

On tire de là

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{D-D'}{D} - \frac{\mu D' v^2}{D\,2}.$$

Nous avons trouvé

$$m\frac{dv}{dt} = f$$

Intégrant on a

$$mv = ft. \quad \text{mv est la quantité de mouvement}$$

Remplaçant v par sa valeur on aura

$$m\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d\frac{de}{dt}}{dt} = f.$$

Intégrant il vient

$$m\left(\frac{de}{dt}\right)^2 = 2fe$$

ou bien $\quad mv^2 = 2fe.$

Le produit de la masse par le ~~est~~ carré de la vitesse est ce qu'on appelle la <u>force vive</u>.

33me Leçon

Mouvement rectiligne de plusieurs corps agissant les uns sur les autres.

Considérons d'abord deux points matériels m, m_1 qui aient déjà acquis une certaine vitesse et qui se meuvent suivant la droite AB qu'ils [?] Supposons que ces deux pts s'attirent l'un l'autre. L'action est égale à la réaction; c.à.d que la force qui porte m_1 vers m est égale à celle qui porte m vers m_1; ou plutôt ces deux forces n'en font qu'une seule qui tend à rapprocher les deux corps. ~~Représentons cette force par P l'intensité de cette force à l'unité de distance.~~ Représentons par m et par m_1 le nombre des molécules de chaque masse. Lorsque les deux masses seront à l'unité de distance, une molécule quelconque de la masse m attirera chacune des m_1 molécules de l'autre masse avec une force égale à l'unité. Par conséquent l'attraction exercée par une molécule de m sur la masse m_1 sera égale à m_1, et comme il y a m molécules de la masse m, l'attraction de m sur m_1, à l'unité de distance sera $m.m_1$. Représentant par ~~m~~ r la distance mm_1, et par P l'attraction des deux masses à cette distance, on aura, puisque l'attraction croît en

raison inverse du carré de la distance

$$P = \frac{m.m_1}{r^2}.$$

Nous aurons pour la force qui attire m_1 vers m

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = P. \quad (A)$$

La force qui attire m vers m_1 sera égale à la précédente prise en signe contraire, c.à.d. qu'on aura

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -P. \quad (B)$$

Ajoutant ces deux éq. on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0 \quad \text{Intégrant}$$

$$(1) \quad m\frac{dx}{dt} + m_1\frac{dx_1}{dt} = c \quad \text{ou bien.}$$

$$mv + m_1v_1 = c$$

Ainsi la somme des quantités de mouvement est constante. Représentant par V et V_1 les vitesses des deux mobiles après un temps quelconque, nous aurons

$$mV + m_1V_1 = C = mv + m_1v_1$$

L'éq. (1) peut s'écrire ainsi

$$mdx + m_1dx_1 = Cdt$$

Intégrant on aura

$$mx + m_1x_1 = Ct + C'$$

Appelons X l'abscisse du centre de gravité des deux masses; nous aurons

$$X = \frac{mx + m_1x_1}{m + m_1}$$

d'où $\quad (m+m_1)X = mx + m_1x_1 = Ct + C'$

$$X = \frac{C}{m+m_1}t + \frac{C'}{m+m_1}$$

On voit par là que le mouvement du centre de gravité est uniforme. Sa vitesse est

$$\frac{dX}{dt} = \frac{c}{m+m_1} = \frac{mV + m_1 V_1}{m+m_1}$$

Multiplions (A) par $2dx$ et (B) par $2dx_1$ et ajoutons. Nous aurons

$$2m\frac{dx}{dt}d.\frac{dx}{dt} + 2m_1\frac{dx_1}{dt}d\frac{dx_1}{dt} = -2P(dx_1 - dx)$$

Substituant à P sa valeur et intégrant on aura ~~si nous supposons que pour les mêmes masses~~ la force P ne dépende que de leur distance, nous aurons

$$P = f(x_1 - x) = F'(x_1 - x)$$

car on peut toujours supposer qu'une fonction d'une certaine variable est la dérivée de la ~~même variable~~ d'une autre fonction de la même variable. Nous aurons donc

$$2m\frac{dx}{dt}d\frac{dx}{dt} + 2m_1\frac{dx_1}{dt}d\frac{dx_1}{dt} = -2F'(x_1 - x)(dx_1 - dx).$$

Intégrant on trouve

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = C - 2F(x_1 - x) \quad \textbf{(M)}$$

Cette éq. montre que la somme des forces vives des deux masses est la même lorsque leur distance est aussi la même.

Nous avons trouvé $P = \frac{mm_1}{z^2}$. Nous aurons donc

$$F'(x_1 - x) = \frac{mm_1}{(x_1 - x)^2}$$

d'où $$F(x_1 - x) = -\frac{mm_1}{x_1 - x}$$

~~Aussi l'éq. (M) deviendra~~

$$mv^2 + m_1 v_1^2 = C + 2\frac{mm_1}{x_1 - x}$$

Représentons par a_1 et a les abscisses des points où se trouvent les mobiles lorsqu'ils ont acquis les vitesses V_1 et V nous aurons

$$mV^2 + m_1 V_1^2 = C + 2\frac{mm_1}{a_1 - a}.$$

d'où $$C = mV^2 + m_1 V_1^2 - 2\frac{mm_1}{a_1 - a}.$$

Nous aurons donc

$$mv^2 + m_1 v_1^2 = mV^2 + m_1 V_1^2 + 2\frac{mm_1}{x_1 - x} - 2\frac{mm_1}{a_1 - a}.$$

Nous avons de plus

$$mv + m_1 v_1 = mV + m_1 V_1.$$

Nous avons donc deux éq. pour déterminer les vitesses v et v_1.

Considérons maintenant un nombre quelconque de points placés sur une même droite et agissant les uns sur les autres. Représentons par $P_{\mu,\mu'}$ la force qui agit entre m_μ et $m_{\mu'}$. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= P_{0,1} + P_{0,2} + P_{0,3} \\ m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -P_{1,0} + P_{1,2} + P_{1,3} \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -P_{2,0} - P_{2,1} + P_{2,3} \\ m_3\frac{d^2x_3}{dt^3} &= -P_{3,0} - P_{3,1} - P_{3,2} \end{aligned}\right\} (4)$$

m m_1 m_2 m_3

Ajoutant ces 4 éq. on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + m_3\frac{d^2x_3}{dt^3} = 0$$

Intégrant il vient

$$m\frac{dx}{dt} + m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt} + m_3\frac{dx_3}{dt} = C.$$

ou bien

$$mv + m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 = C = mV + m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3.$$

Ainsi la somme des quantités de mouvement est constante. Multipliant par dt et intégrant de nouveau il vient

$$mx + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = Ct + C'.$$

Soit X l'abscisse du centre de gravité du système nous aurons

$$mx + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = (m + m_1 + m_2 + m_3)X = MX$$

d'où
$$MX = Ct + C'$$
$$X = \frac{C}{M}t + \frac{C'}{M}.$$

Quant à la vitesse du centre de gravité elle est

$$\frac{dX}{dt} = \frac{C}{M} = \frac{mV + m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3}{m + m_1 + m_2 + m_3}.$$

Les différentes forces P ne dépendent que de la distance des deux mobiles entre lesquels elles agissent, nous aurons donc

$$P_{0,1} = f(x_1 - x) \quad P_{0,2} = f_1(x_2 - x) \dots\dots P_{2,3} = f_5(x_3 - x_2)$$

Remplaçant ces forces par leurs valeurs dans les éq: (4) multipliant respectivement par $2dx$, $2dx_1$, $2dx_2$, $2dx_3$ et ajoutant il vient.

$$2m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt} + 2m_1\frac{dx_1}{dt}\frac{d^2x_1}{dt} + 2m_2\frac{dx_2}{dt}\frac{d^2x_2}{dt} + 2m_3\frac{dx_3}{dt}\frac{d^2x_3}{dt}$$

$$= 2f(x_1 - x)(dx - dx_1) + 2f_1(x_2 - x)(dx - dx_2) \dots - f_5(x_3 - x_2)(dx_2 - \dots$$

Intégrant on aura.

$$m v^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 =$$

$$C - 2F(x_1 - x) - 2F_1(x_2 - x) - 2F_2(x_3 - x) - 2F_3(x_2 - x_1) - 2F_4(x_3 - x_1) - 2F_5(x_3 - x_2).$$
&c.

Considérons maintenant le cas où les corps sont gênés par des obstacles ou liés entre eux d'une manière quelconque.

On ne peut pas examiner le cas où deux points sont liés entre eux d'une manière invariable car alors on pourrait les remplacer par un seul mobile.

Soit o un point fixe et supposons que les deux points m et m_1 se meuvent sur la ligne AB de manière que l'angle mom_1 reste constant.

Soit $oA = a$, nous aurons

$$\text{tang } Aom = \frac{x}{a} \quad \text{tang } Aom_1 = \frac{x_1}{a}$$

Aussi représentant par $\frac{1}{b}$ la tang. de l'angle constant mom_1 nous aurons

$$\text{tang } mom_1 = \frac{a(x_1 - x)}{a^2 + xx_1} = \frac{1}{b} \quad ab(x_1 - x) = a^2 + xx_1$$

ou bien $\quad L_1 = ab(x_1 - x) + a^2 + xx_1 = 0.$

Voilà l'équation qui exprime la liaison qui existe entre le point m et le point m_1. Cherchons maintenant les conditions d'équilibre. Le principe des vitesses virtuelles nous donne

$$\left(X + \lambda \frac{dL_1}{dx}\right) dx + \left(X_1 + \lambda \frac{dL_1}{dx_1}\right) dx_1 = 0$$

Égalant à zéro chacun des coefficients nous aurons deux éq. qui jointes à $L_1 = 0$ nous donneront x, x_1 & λ.

Nous avons en différentiant $L = 0$

$$\frac{dL}{dx} = x_1 + ab \qquad \frac{dL}{dx_1} = x - ab.$$

Nous aurons donc

$$X + \lambda(x_1 + ab) = 0 \qquad X_1 + \lambda(x - ab) = 0.$$

ajoutant ces deux éq. on en tire

$$\lambda = -\frac{X + X_1}{x + x_1}$$

éq qui fait connaître la force qu'on pourrait substituer aux liaisons. En retranchant la 2de éq. de la 1re on tirerait une autre valeur de λ, égalant ces deux valeurs on aura une éq. qui jointe à $L = 0$ donnera les valeurs de x et x_1 ou la position d'équilibre

Considérons actuellement le cas de mouvement. Supposons que la force X appliquée en m soit décomposée en deux de la même direction l'une $m\frac{d^2x}{dt^2}$ et l'autre $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$. La 1re communique seule le mouvement en sorte que l'autre devra s'anéantir. Décomposons de même X_1 en deux forces $m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}$ et $X_1 - m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}$ cette dernière devra disparaître. Ainsi les deux forces $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$ et $X_1 - m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}$ doivent se faire équilibre. Ainsi ds les éq. d'équilibre il faut remplacer X et X_1 par les forces ci-dessus. De cette manière on introduira la variable t;

en sorte qu'on aura X X_1 et λ en fonction de t

On connaitra les positions des points m m_1 à chaque instant et les forces qui agissent sur le levier mom[ent] pour que l'angle reste constant. Les éq. d'équilibre donneront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{dL}{dx} = P + \lambda\frac{dL}{dx}$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda\frac{dL}{dx_1} = -P + \lambda\frac{dL}{dx_1}$$

Ajoutant il vient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = \lambda\left(\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dx_1}\right)$$

Comme le 2^d membre n'est pas nul on ne saura généralement pas intégrer, ainsi le principe des quantités de mouvement n'aura pas lieu. Il n'en est pas de même de celui des forces vives.

Car ds ce cas

$$P = f(x_1 - x) = F'(x_1 - x) \qquad \text{ainsi}$$

$$2m\frac{dx}{dt}d\frac{dx}{dt} + 2m_1\frac{dx_1}{dt}d\frac{dx_1}{dt} =$$

$$-2F'(x_1-x)(dx_1-dx) + 2\lambda\left(\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dx_1}dx_1\right)$$

Mais à cause de $L=0$. $\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dx_1}dx_1 = 0$

On aura donc en intégrant

$$mv^2 + m_1 v_1^2 = C - 2F(x_1 - x) \qquad \text{D. \&c.}$$

Choc des Corps.

Lorsque deux corps doués d'une certaine vitesse viennent à se rencontrer, ils éprouvent une compression mutuelle qui change leurs vitesses primitives. Supposons deux sphères m m_1 infiniment petites qui se meuvent suivant AB avec des vitesses V et V_1 soit $V > V_1$ la sphère m atteindra bientôt m_1, il en résultera une pression égale pour les deux sphères pression qui diminuera V et augmentera V_1. Soit P cette pression où la vitesse V diminue et que V_1 augmente nous aurons

$$-P = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad P = m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}.$$

d'où

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0.$$

Cette eq. aura lieu pendant tout le temps que les sphères agiront l'une sur l'autre. On tire de là en intégrant

$$m\frac{dx}{dt} + m_1\frac{dx_1}{dt} = C \qquad (A)$$

ou bien $\quad mv + m_1v_1 = C$

Or, à l'instant où les corps se rencontrent ils ont les vitesses V et V_1 on a donc

$$mv + m_1v_1 = mV + m_1V_1.$$

La quantité de mouvement est donc constante avant pendant et après le choc.

En intégrant l'eq. (A) on trouve

$$mx + m_1x_1 = Ct + C'$$

X étant l'abscisse du centre d'inertie des deux

mobiles on aura

$$X = \frac{mx + m_1 x_1}{m + m_1}$$

d'où $\quad (m+m_1) X = ct + c'.$

Différentiant on aura

$$\frac{dX}{dt} = \frac{c}{m+m_1} = \frac{mV+m_1V_1}{m+m_1}$$

Le centre de gravité se meut donc d'une manière uniforme avant et après le choc

Supposons d'abord que les corps soient parfaitement mous, c.à.d. qu'ils ne tendent nullement à revenir à leur première forme. Alors les deux corps après le choc se mouvront ensemble avec la même vitesse. L'effet du choc ds ce cas est donc de rendre égales les vitesses V et V_1. Il faut donc en représentant par v et v_1 ce que deviennent ces vitesses après le choc qu'on ait $v = v_1$ et co on a touj.

$$mv + m_1 v_1 = mV + m_1 V_1.$$

on aura $\quad (m+m_1)\, v = mV + m_1 V_1.$

Soit u cette vitesse des mobiles après le choc, on aura

$$u = \frac{mV + m_1 V_1}{m + m_1}$$

Cette vitesse est précisément celle du centre de gravité des deux mobiles, et c'est ce qu'on pouvait prévoir, puisque les mobiles se sont réunis.

Si les mobiles alloient au devant l'un de l'autre le choc contribuerait à diminuer les vitesses V et V_1 on aurait donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P \qquad m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -P$$

d'où $\quad m\dfrac{d^2x}{dt^2} - m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 0.$

et par suite

$$m\frac{dx}{dt} - m_1\frac{dx_1}{dt} = c \quad \text{ou bien}$$

$$mv - m_1v_1 = mV - m_1V_1$$

Si une des vitesses était nulle, c.à.d. si le corps choqué était en repos, on aurait

$$u = \frac{mV}{m+m_1}$$

c.à.d. que ds ce cas la vitesse décroît ds le rapport de la masse du corps choquant à la somme des deux masses.

Supposons les corps parfaitement élastiques.

Les forces qui naissent du choc dépendent de la distance des centres après ce choc. Ns aurons donc

$$P = f(x_1 - x) = F'(x_1 - x)$$

d'où $\quad m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -F'(x_1 - x)$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = F'(x_1 - x) \quad \text{d'où l'autre}$$

$$2m\frac{dx}{dt}d\frac{dx}{dt} + 2m_1\frac{dx_1}{dt}d\frac{dx_1}{dt} = 2F'(x_1-x)(dx_1-dx)$$

On aura donc en intégrant

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = c + 2F(x_1 - x)$$

b étant la distance des centres au commencement de l'action lorsque les vitesses sont V et V_1 on aura

$$mV^2 + m_1V_1^2 = c + 2F(b) \qquad \text{d'où}$$

$$mv^2 + m_1v_1^2 = mV^2 + m_1V_1^2 + 2F(x_1 - x) - 2F(b)$$

Or la force P était nulle avant le choc, elle doit redevenir nulle après le choc $F(x_1 - x)$ sera donc une quantité constante égale à $F(b)$ provenant de l'intégration de $F'(x_1 - x) = 0$. On a donc

$$mv^2 + m_1 v_1^2 = mV^2 + m_1 V_1^2.$$

Cette éq. jointe à celle-ci

$$mv + m_1 v_1 = mV + m_1 V_1$$

qui est vraie ds le choc des corps élastiques cō ds le choc des corps mous, suffit pour ns donner les vitesses v et v_1 qui ont lieu après le choc. De la 1re on tire

$$m_1(v_1^2 - V_1^2) = m(V^2 - v^2)$$

et de la 2de $m_1(v_1 - V_1) = m(V - v)$

Divisant membre à membre on a

$$v_1 + V_1 = v + V.$$

éq. qui a toujs lieu dans le choc de deux corps parfaitement élastiques quelles que soient leurs masses. On tire de cette éq.

$$V - V_1 = v_1 - v.$$

$V - V_1$ est ce qu'on appelle la vitesse relative. Pour avoir v nous avons.

$$V_1 - v = V - v_1$$

d'où $m_1 V_1 - m_1 v = m_1 V - m_1 v_1$.

Retranchant cette éq. de

$$mv + m_1 v_1 = mV + m_1 V_1 \quad \text{on aura.}$$

$$(m + m_1) v = (m - m_1) V + 2 m_1 V_1$$

d'où $$v = \frac{(m - m_1) V + 2 m_1 V_1}{m + m_1}.$$

Telle est la vitesse du corps choquant après le choc. Cette vitesse est $< V$. On trouverait de même

$$v_1 = \frac{2mV + (m_1 - m) V_1}{m + m_1}$$

v_1 est donc $> V_1$. Car en posant

$$2mV + (m_1 - m) V_1 > (m + m_1) V_1 \quad \text{on trouve}$$

$$2mV > 2mV_1 \quad \text{d'où} \quad V > V_1 \quad \text{ce que}$$

ns avions supposé

De la valeur de v on tire

$$V+v=\frac{2m_1V_1+(m-m_1)V}{m+m_1}+V=2\frac{m_1V_1+mV}{m+m_1}.$$

C'est le double de la vitesse u du centre de gravité

On aura donc

$$V+v=2u$$

de même $$V_1+v_1=2u$$

Donc la somme des vitesses avant et après le choc est égale à $2u$. Il suffit donc de calculer $u=\frac{mV+m_1V_1}{m+m_1}$. Quand on connaîtra V et V_1 on aura v et v_1.

Ds le cas des corps parfaitement élastiques nous avons vu qu'on a

$$mv^2+m_1v_1^2=mV^2+m_1V_1^2.$$

La somme des forces vives est constante. Il n'en est pas de même pour les corps mous. Puisque les vitesses deviennent égales à u après le choc on aura

$$mu^2+m_1u^2=\frac{(mV+m_1V_1)^2}{m+m_1}.$$

Prenant la différence entre cette somme et celle qui a lieu avant le choc on a

$$mV^2+m_1V_1^2-\frac{m^2V^2+2mm_1VV_1+m_1^2V_1^2}{m+m_1}$$

$$=\frac{mm_1V^2+mm_1V_1^2-2mm_1VV_1}{m+m_1}=\frac{mm_1}{m+m_1}(V-V_1)^2.$$

Ainsi ds le choc des corps mous il se perd une quantité de force vive, qui est représentée par la ~~masse~~ force vive d'une masse $\frac{mm_1}{m+m_1}$

et ayant $V-V_1$ pour vitesse.

On peut donner une autre expression de cette force vive. Ns avons

$$V-u = V - \frac{mV+m_1V_1}{m+m_1} = \frac{m_1(V-V_1)}{m+m_1}$$

C'est la vitesse perdue par le premier mobile. La vitesse gagnée par le 2^d sera

$$u-V_1 = \frac{mV+m_1V_1}{m+m_1} - V_1 = \frac{m(V-V_1)}{m+m_1}$$

Prenons les forces vives correspondantes à ces vitesses perdues ou gagnées ns aurons

$$m(V-u)^2 = \frac{m m_1^2 (V-V_1)^2}{(m+m_1)^2}$$

$$m_1(u-V_1)^2 = \frac{m_1 m^2 (V-V_1)^2}{(m+m_1)^2}$$

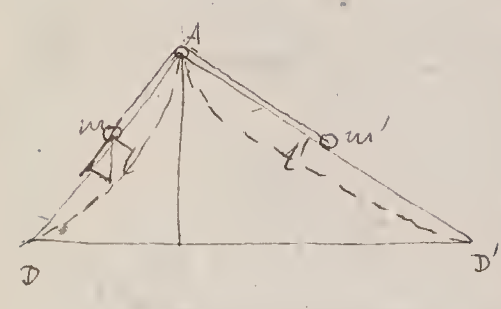
d'où

$$m(V-u)^2 + m_1(u-V_1)^2 = \frac{(m m_1^2 + m_1 m^2)(V-V_1)^2}{(m+m_1)^2} = \frac{m m_1 (V-V_1)^2}{m+m_1}$$

qui est l'expression que ns avions déjà trouvée pour la perte des forces vives ds le choc des corps mous. Ns pouvons donc dire que cette perte est équivalente à la somme des forces vives dues aux vitesses perdues ou gagnées par les mobiles.

35me et dernière Leçon.

On suppose que deux poids matériels glissent sur deux plans inclinés adossés et ayant même hauteur. Ces deux poids sont liés entre eux par un cordon qui passe sur une poulie A de



manière que mA et m'A soient parallèles à AD et AD'. m étant la masse du point m, mg sera la pression qu'elle exercerait sur un plan horizontal. Pour trouver la pression sur le plan AD. nous avons

$$l : h = gm : x \quad \text{d'où} \quad x = mg\frac{h}{l}.$$

Si le corps était libre sa vitesse v serait donc telle qu'on aurait $m\frac{dv}{dt} = m\frac{gh}{l}$ ou $\frac{dv}{dt} = \frac{gh}{l}$. Car la résistance qu'il oppose qui est $\frac{mdv}{dt}$ est égale à la force $m\frac{gh}{l}$ qui le sollicite.

Si maintenant nous supposons que le point m soit lié au point m', la masse m tendra à mouvoir la masse m' qui par son poids opposera une certaine force, la tension du cordon Am sera donc ds ce cas $m\left(\frac{gh}{l} - \frac{dv}{dt}\right)$ v représentant touj. la vitesse du point m. La tension du cordon Am' sera $m'\left(\frac{gh}{l'} - \frac{dv'}{dt}\right)$ Ces deux tensions étant égales on a

$$m\left(\frac{gh}{l} - \frac{dv}{dt}\right) = m'\left(\frac{gh}{l'} - \frac{dv'}{dt}\right)$$

Car la force qui agit sur le mobile m est $m\frac{gh}{l}$ Mais ce mobile par son inertie fait perdre une partie de la force qui est $m\frac{dv}{dt}$. La différence $m\frac{gh}{l} - m\frac{dv}{dt}$ est donc bien la tension du cordon Am. Pour résoudre l'éq. précédente on a $v = \frac{dx}{dt}$ $v' = \frac{dx'}{dt}$ En comptant x sur AD et x' sur AD' on a $x + x' = C$.

Donc $dx = -dx'$ d'où $v + v' = 0$. Les vitesses sont donc égales et de signes contraires. Puisque $\frac{dv'}{dt} = -\frac{dv}{dt}$

nous aurons

$$m\left(\frac{gh}{l} - \frac{dv}{dt}\right) = m'\left(\frac{gh}{l'} + \frac{dv}{dt}\right)$$

d'où

$$\frac{gmh}{l} - \frac{ghm'}{l'} = m'\frac{dv}{dt} + m\frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{gh(ml' - m'l)}{ll'} = (m + m')\frac{dv}{dt}$$

donc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h(ml' - m'l)}{(m+m')ll'}g$$

On obtient le rapport numérique dans lequel la pesanteur est diminuée. En intégrant cette dernière éq. on a

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{h(ml' - m'l)}{(m+m')ll'}gt + a.$$

$\underline{a}$ étant la vitesse initiale du mobile avant de suivre le plan incliné. Intégrant de nouveau on trouve

$$x = \frac{h(ml' - m'l)}{(m+m')ll'}\frac{gt^2}{2} + at + b.$$

$\underline{b}$ est l'espace parcouru pendant que le corps se meut avec la vitesse $\underline{a}$. Si on suppose les mobiles en repos au point A on aura

$$x = \frac{h(ml' - m'l)}{(m+m')ll'}\frac{gt^2}{2}$$

Puisqu'on suppose que les deux corps partent du repos, il y aura un cas où l'équilibre existera. Il suffit pour cela qu'on ait $ml' = m'l$. d'où

$$m : m' = l : l'$$

C.à.d. que ds ce cas, les masses sont proportionnelles

aux longueurs des plans inclinés. L'équilibre existe évidemment puisque les forces qui agissent sont $\frac{ghm}{l}$ $\frac{ghm'}{l'}$ Ces forces seront égales puisque $\frac{m}{l}=\frac{m'}{l'}$.

Supposons maintenant que le fil soit pesant. Si on considère le fil seul sans qu'il y ait aucun poids à ses extrémités nous ~~nous re~~ représenterons par c la longueur constante du fil par K la masse de l'unité de longueur par x la longueur du cordon sur le premier plan ~~et par suite~~ $c-x$ sera la longueur de la partie du cordon qui est sur le 2^d plan. Kx et $K(c-x)$ sont les masses des portions du cordon qui sont sur chaque plan. On aura donc

$$Kx\left(\frac{gh}{l}-\frac{dv}{dt}\right)=K(c-x)\left(\frac{gh}{l'}+\frac{dv}{dt}\right)$$

ou $\frac{gh}{l}x-(c-x)\frac{gh}{l'}=(c-x)\frac{d^2x}{dt^2}+x\frac{d^2x}{dt^2}=c\frac{d^2x}{dt^2}$.

d'où $$\frac{gh(l+l')}{cll'}x-\frac{gh}{l'}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pour intégrer cette éq. ns poserons

$$\frac{gh(l+l')}{cll'}=\alpha^2 \quad \frac{gh}{l'}=6 \quad \text{d'où}$$

$$\alpha^2x-6=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Multipliant par $2dx$ on a

$$2\frac{dx}{dt}\,d\frac{dx}{dt}=2\alpha^2xdx-26dx.$$

Intégrant

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\alpha^2x^2-26x+C,$$

d'où $$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\alpha^2x^2-26x+C}$$

On prend le signe + pour le radical en supposant que la vitesse tend à augmenter x. On aura donc

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 x^2 - 2bx + c}} = \frac{dx}{\alpha\sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}}}.$$

d'où $$\alpha dt = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}}}.$$

Pour intégrer nous poserons

$$\sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}} = z - x$$

d'où $$-\frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2} = z^2 - 2zx.$$

Différentiant on trouve

$$-\frac{2b}{\alpha^2}dx = 2zdz - 2xdz - 2zdx$$

d'où $$dx\left(z - \frac{b}{\alpha^2}\right) = (z-x)dz = \sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}} \cdot dz.$$

$$\alpha dt = \frac{dz}{z - \frac{b}{\alpha^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{2b}{\alpha^2}x + \frac{c}{\alpha^2}}}$$

Intégrant on a

$$\alpha t = l\left(z - \frac{b}{\alpha^2}\right) + lc' = l\left(x - \frac{b}{\alpha^2} + \sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}}\right) + lc'$$

D'où l'on tire

$$x - \frac{b}{\alpha^2} + \sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}} = \frac{1}{c'} e^{\alpha t}.$$

Je multiplie $$x - \frac{b}{\alpha^2} + \sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}}$$

par $$x - \frac{b}{\alpha^2} - \sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}}$$

Ce qui donne

$$x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\alpha^4} - x^2 + \frac{2bx}{\alpha^2} - \frac{c}{\alpha^2}.$$

ou bien $$\frac{b^2}{\alpha^4} - \frac{c}{\alpha^2}.$$

Nous aurons donc

$$x - \frac{b}{\alpha^2} - \sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}} = \frac{\frac{b^2}{\alpha^4} - \frac{c}{\alpha^2}}{\frac{1}{c'} e^{\alpha t}} = c'' e^{-\alpha t}.$$

c'' est une constante arbitraire puisqu'elle dépend des deux constantes arbitraires c et c'. Ajoutons cette dernière éq. à

$$x - \frac{b}{\alpha^2} + \sqrt{x^2 - \frac{2bx}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^2}} = \frac{1}{c'} e^{\alpha t}$$

nous aurons

$$2x - \frac{2b}{\alpha^2} = \frac{1}{c'} e^{\alpha t} + c'' e^{-\alpha t}$$

d'où l'on tire une valeur de x de la forme

$$x = \frac{b}{\alpha^2} + a e^{\alpha t} + b e^{-\alpha t}.$$

Pour trouver v ou $\frac{dx}{dt}$ je différentie et j'ai

$$v = \frac{dx}{dt} = \alpha(a e^{\alpha t} - b e^{-\alpha t})$$

Supposons que lorsqu'on aura $t=0$ la vitesse soit V et que $x = X$. On aura en faisant $t=0$ dans les éq. précédentes

$$X - \frac{b}{\alpha^2} = a + b$$

$$V = \alpha(a-b) \qquad \text{d'où l'on tire}$$

$$a + b = X - \frac{b}{\alpha^2} \quad a - b = \frac{V}{\alpha} \quad \text{et par suite}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(X + \frac{V}{\alpha} - \frac{b}{\alpha^2}\right) \qquad b = \frac{1}{2}\left(X - \frac{V}{\alpha} - \frac{b}{\alpha^2}\right)$$

Dans le cas où le corps part du repos on a $V=0$.

d'où $a = b = \frac{1}{2}\left(X - \frac{b}{\alpha^2}\right)$ et par suite

$$x = \frac{b}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\left(X - \frac{b}{\alpha^2}\right)\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right)$$

En faisant $t=0$ on trouve $x = X$ ce qui doit être.

Quant à la vitesse elle sera

$$v = \frac{1}{2}\alpha\left(X - \frac{b}{\alpha^2}\right)\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)$$

Pour que $v=0$ il faut qu'on ait $X = \frac{b}{\alpha^2}$ ce qui donne la longueur de la corde ds le cas de l'équilibre.

Substituons ds cette valeur de X la valeur de α et de b ns aurons

$$X = \frac{gh}{l'} \cdot \frac{cll'}{gh(l+l')} = \frac{cl}{l+l'}$$

Pour cette valeur de X l'équilibre existera. Car on aura

$$x : c - X = \frac{cl}{l+l'} : c - \frac{cl}{l+l'} = l : l'.$$

et-cō les masses des cordons sont proportionnelles à leurs longueurs, il s'en suit que les masses sont proportionnelles aux longueurs des plans inclinés ce qui donne la condition d'équilibre.

m et m' étant les extrémités de la corde, ns voyons que la condition d'équilibre donne

$$Am : Am' = AD : AD'$$

Les extrémités de la corde sont donc sur une ligne horizontale.

Ns avons trouvé plus haut

$$g' = \frac{h(ml' - m'l)}{(m+m')ll'} g.$$

Ds le cas de la machine d'Atwood on a $l = l' = h$

d'où $$g' = \frac{dv}{dt} = \frac{m-m'}{m+m'} g,$$

et par suite $$v = \frac{m-m'}{m+m'} gt,$$

En supposant que $v=0$ lorsque $t=0$, on aura.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m-m'}{m+m'} gt \quad \text{d'où}$$

$$x = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot \frac{gt^2}{2} + at + b.$$

~~En supposant que a soit la vitesse initiale, si on pose x=0 on aura b=0~~. Les espaces parcourus x suivent la même loi que pour la pesanteur. Pour l'équilibre il faut que $x=0$ d'où $m=m'$, ce qui donne aussi $v=0$; en ne supposant pas de vitesse initiale.

Nous avons déjà posé dans le cas du mouvement d'une corde pesante sur deux plans inclinés

$$\alpha^2 = \frac{gh(l+l')}{cll'} \qquad \beta = \frac{gh}{l'}$$

Considérons maintenant une corde pesante passant sur une poulie. Il faut faire $l=l'=h$. d'où

$$\alpha^2 = \frac{2g}{c} \qquad \beta = g$$

et par suite en substituant dans

$$x = \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right)$$

Nous aurons

$$x = \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\left(X - \frac{c}{2}\right)\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{2c}}\left(X - \frac{c}{2}\right)\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right)$$

Ces formules donnent le mouvement d'une corde pesante.

Supposons maintenant qu'on attache des poids m et m' aux extrémités de la corde. Nous aurons l'éq.

$$(m+Kx)\left(\frac{gh}{l} - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = (m'+K(c-x))\left(\frac{gh}{l'} + \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

Si $h=l=l'$ nous aurons

$$(m+Kx)\left(g-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=(m'+K(c-x))\left(g+\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

d'où $g(m+Kx-m'-K(c-x))=(m+Kx+m'+K(c-x))\frac{d^2x}{dt^2}$.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2gK}{m+m'+Kc}x-\frac{g(Kc+m'-m)}{m+m'+Kc}$$

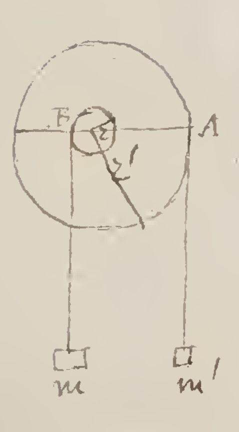
Pour intégrer cette éq. ns poserons

$$\frac{2gK}{k+m+m'}=\alpha^2 \qquad \frac{g(Kc+m'-m)}{Kc+m+m'}=\beta.$$

d'où $\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha^2x+\beta.$

Cette éq. s'intégrerait co la précédente. Ce cas s'applique à la machine d'Atwood.

Considérons encore le mouvement de deux corps pesants qui agissent l'un sur l'autre par l'intermédiaire d'un treuil.



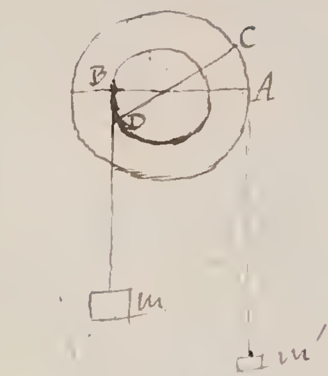
Si la masse m était libre il faudrait pour l'équilibre que l'on eût

$$mg-m\frac{dv}{dt}=0$$

si ns supposons que ce corps soit retenu par une autre force, il reste touj. la force $m\left(g-\frac{dv}{dt}\right)$ pour la tension du cordon. L'autre force qui tend le cordon est $m'\left(g-\frac{dv'}{dt}\right)$. Ces deux forces se faisant équilibre sont entre elles ds le rapport du rayon de la roue au rayon du cylindre ns aurons donc

$$mr\left(g-\frac{dv}{dt}\right)=m'r'\left(g-\frac{dv'}{dt}\right)$$

On prend toujours ds chaque membre le surplus de la force due à la pesanteur sur la force que l'inertie fait perdre. (x)



~~Soit x la partion de la corde qui s'enroule sur le cylindre en même temps que la partion x' s'enroule sur la roue. Ces longueurs de cordes sont proportionnelles aux arcs de cercle qu'elles embrassent et par suite aux rayons et cō x et x' sont de signes contraires~~ ns aurons

(x) Supposons qu'au commencement du mouv.t on ait $Bm = l$ $Am' = l'$. Soit $BD = y$ $AC = y'$. Nommons x et x' les distances des p.ts de contact aux extrémités des cordons lorsque le p.t C est venu en A et le p.t B en D. Ns aurons

$x = l - y$ $x' = l' + y'$

d'où $r'x + rx' = r'l + rl' - r'y + ry'$.

Or $y : y' = r : r'$ d'où $r'y = ry'$

donc $r'x + rx' = C$. (⊙)

$$(\odot) \quad r'x + rx' = C$$ d'où en différentiant

$$r'\frac{dx}{dt} = -r\frac{dx'}{dt}$$

ou bien $$r'v = -rv'$$

Différentiant $$\frac{dv'}{dt} = -\frac{r'}{r}\frac{dv}{dt}$$

Ns aurons donc

$$mr\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = m'r'\left(g + \frac{r'}{r}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$mr^2\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = m'r'\left(gr + r'\frac{dv}{dt}\right)$$

d'où $$\frac{dv}{dt} = \frac{gr(mr - m'r')}{mr^2 + m'r'^2}.$$

C'est ce rapport numérique ds lequel la pesanteur est diminuée. Ns aurons donc

$$dv = \frac{r(mr - m'r')}{mr^2 + m'r'^2}\, g\,dt$$ et par suite

$$dv' = -\frac{r'}{r}dv = -r'\left(\frac{mr - m'r'}{mr^2 + m'r'^2}\right) g\,dt.$$

En intégrant ns aurons

$$v = \frac{dx}{dt} = r\frac{mr - m'r'}{mr^2 + m'r'^2}\, gt + a$$

et par suite

$$x = r\frac{mr - m'r'}{mr^2 + m'r'^2}\,\frac{gt^2}{2} + at + b.$$

La loi de mouvement d'un corps ~~pe~~ pesant attaché ~~Si $a=0$ on aura $b=0$ aussi a suit la loi~~ à un treuil, ~~est donc~~ la même que celle d'un corps libre. ~~du mouvement des corps pesants.~~

Pour tenir compte du poids du cordon, il faut observer que ~~le produit des rayons par les longueurs du cordon est constant. En effet on a~~ l'on a

~~$dx : -dx' = r : r'$~~

~~d'où $r\,dx' + r'\,dx = 0$ et par suite~~

$$rx' + r'x = C \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{C - r'x}{r}$$

~~Pour avoir égard au poids du cordon~~ Il faut donc substituer $m + Kx$ $m' + Kx'$ à m, m' et poser $x' = \frac{C - r'x}{r}$, on aura ~~donc~~ alors

$$(m + Kx)\left(g - \frac{dv}{dt}\right) r = \left(m' + K\frac{C - r'x}{r}\right)\left(g - \frac{dv'}{dt}\right) r'$$

ou $$(m + Kx)\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right) r = \left(m' + K\frac{C - r'x}{r}\right)\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) r'$$

or on a $$r'\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$$

d'où $$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{r'}{r}\frac{d^2x}{dt^2}$$ on aura donc

$$(m + Kx)\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right) r = \left(m' + K\frac{C - r'x}{r}\right)\left(g + \frac{r'}{r}\frac{d^2x}{dt^2}\right) r'$$

Il ne reste plus qu'à intégrer pour trouver x et v.

On peut supposer que sur un même cylindre il y ait plusieurs roues. Les forces à considérer seront tousj[ours] $m\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$ $m'\left(g - \frac{dv'}{dt}\right)$ $m''\left(g - \frac{dv''}{dt}\right)$

On aura donc

$$mr\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = m'r'\left(g - \frac{dv'}{dt}\right) + m''r''\left(g + \frac{dv''}{dt}\right) \text{ d'où}$$

~~$$mr\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = m'r'\left(gr + \frac{dv'}{dt}\right) + m''r''\left(gr + \frac{dv''}{dt}\right)$$~~

$$mr^2\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = m'r'\left(gr + r'\frac{dv}{dt}\right) + m''r''\left(gr + r''\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \Sigma \frac{mr - m'r' - m''r''}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2} g = \Sigma \frac{\Sigma mr}{\Sigma mr^2} g.$$

Intégrant on aura les valeurs de x et de v.

Fin

du Cours de la Première année d'Etude.


SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 00318664 0
nmahrb MSS8 B
Cours d'analyse et de m:ecanique &a l':e
AUG 0 9 1983